TRATADO

DE

GEOMETRIA PLANA.

Por el P. Francisco Neumann, Lazarista

QUITO.

Imprenta del clero, por Jose Guzman Almeida.

1877.

PROLOGO.

Habiéndonos propuesto escribir el presente tratado por motivos que no es del caso exponer, hemos debido concluirlo á pesar de los indecibles obstáculos que hemos encontrado. Si el deseo de que la juventud estudiosa camine con facilidad y contento por el vasto y utilísimo campo de las matemáticas no nos hubiera servido de norte en nuestro trabajo, mas de una vez lo hubiéramos abandonado. Terminado por fin, si bien no con la perfeccion que habríamos querido, debemos hacer algunas advertencias que creemos convenientes.

Desde luego verán los profesores que en la division de nuestra obra nos hemos separado del método ordinariamente seguido en materias semejantes; pero esperamos que no seremos tachados por esto de presuntuosos ú originales, porque aparte de no ser los primeros, la experiencia que hemos hecho con nuestros alumnos, bastante claramente nos ha manifestado, cuan importante y cómoda sea nuestra division. Pueden cerciorarse de ello cuantos quisieren tomarse el trabajo de seguirla, comparándola al mismo tiempo con otras de su género. Y no se extrañe que insistamos en este punto, pues aunque á primera vista parece insignificante, no lo es, si se atiende á que el tener ideas claras de una ciencia y por consiguiente el hacer progresos en su estudio, depende principalmente del modo de dividirla.

Por lo que hace á la manera de exponer la doctrina, hemos procurado, en cuanto ha sido posible, que reinen la claridad y precision; mas no por esto hemos cerrado la puerta á las explicaciones del profesor. Antes bien, convencidos de que, en las matemáticas, muchas cosas bastante sencillas en sí, parecen dificultosas é intratables cuando se desenvuelven en largas demostraciones y grande copia de números, vistos siempre con tedio por los jóvenes, hemos creido muy conveniente indicar tan solo lo que es absolutamente necesario para la cabal inteligencia de las materias, dejando á los maestros la ventaja de poder conducir á sus discípulos por el camino que mas expedito les hubiese mostrado la experiencia, sin verse obligados á concretarse á la determinada marcha del texto; y á los jóvenes la satisfaccion de obtener con su propio trabajo, y valiéndose de nuestros datos, el resultado de las cuestiones que se proponen. Tiene además este método la grande conveniencia de desarrollar la inteligencia, forzándola á discurrir y reflexionar, y preparándola así al estudio de ciencias mas profundas.

Nos consideraremos suficientemente recompensados de nuestros desvelos, si logramos disminuir algun tanto las incomodidades que de ordinario experimentan los que se dedican á las matemáticas. Este ha sido nuestro principal empeño, y si acaso no alcanzamos nuestro objeto, es porque las aciagas circunstancias, bajo las cuales nos hemos visto obligados á continuar nuestra obra, las muchas tareas de que como profesor hemos estado cargados, y finalmente la estrechez del tiempo, que nos ha impedido valernos de todos los materiales que habiamos acopiado, han contribuido á que nuestro espíritu haya carecido de la tranquilidad y recogimiento que exigen tratados de esta especie. Con todo damos á luz el nuestro, confiados en que el deseo de ser útiles y las razones que acabamos de exponer, serán suficientes motivos para que se disimulen las faltas é imperfecciones que se encontraren en él.

Quito, julio 15 de 1877.

INTRODUCCION.

Matemáticas. Cantidad. Geometría. Aritmética.

Llamamos *matemáticas* las ciencias que tratan de las cantidades en general. *Cantidad* es todo lo que se puede aumentar ó disminuir. Se dividen las cantidades en contínuas y discretas. Cantidad *contínua* es aquella cuyas partes están unidas entre sí. Esta cantidad puede medirse, por lo cual se llama tambien cantidad mensurable. Cantidad *discreta* es aquella cuyas partes no tienen union ó enlace entre sí. Por poder numerarla se llama tambien cantidad numerable. *Geometría* es la ciencia que tiene por objeto las cantidades contínuas ó mensurables. Llámase *aritmética* la ciencia que se ocupa de las cantidades discretas ó numerables.

Cantidad extensa. Punto.

Cantidad *extensa* es aquella que llamamos arriba cantidad contínua ó mensurable por tener extension. *Extension* es toda parte determinada del espacio. La extension no puede tener mas de tres dimensiones: longitud, latitud y altura ó profundidad. *Cuerpo geométrico* es la extension con tres dimensiones: longitud, latitud y altura ó profundidad. La diferencia entre un cuerpo físico y geométrico consiste en que el cuerpo geométrico no tiene materia, de la que consta el cuerpo físico. El cuerpo geométrico solo tiene forma. *Superficie* es la extension con dos dimensiones: longitud y latitud. *Línea* es la extension con una sola dimension: longitud. *Punto* no es otra cosa que un lugar determinado del espacio, y no tiene ninguna extension. Los *límites del cuerpo* son las superficies. Los *límites de la superficie* son las líneas. Los *límites de la línea* llamamos puntos. La *línea se forma* por un punto que se mueve en una primera direccion. La *superficie se forma* por una línea que se mueve en una segunda direccion. El *cuerpo se forma* por una superficie que se mueve en una tercera direccion. La *línea tiene* puntos, pero no consta de puntos. La *superficie tiene* líneas, pero no consta de líneas. El *cuerpo tiene* superficies, pero no consta de superficies.

Division de las líneas y superficies.

Se dividen las líneas en rectas, curvas y mixtas. La *línea recta* ó simplemente la recta *se forma* por un punto que se mueve continuamente en la misma direccion. La *recta* es el camino mas corto entre dos puntos. La *línea curva* ó simplemente la curva *se forma* por un punto moviéndose continuamente en otra direccion. La *curva* es una línea que no tiene parte alguna recta. La *línea mixta* está compuesta de rectas y curvas. Se dividen las superficies en planas, curvas y mixtas. La *superficie plana* ó simplemente el plano *se forma* por una recta (en un caso tambien por una curva ó línea mixta) que se mueve continuamente en la misma direccion. Llámase *plano* aquella superficie que conteniendo dos puntos de una recta, contiene todos los puntos de ella. La *superficie curva se forma* por una línea, sea recta ó curva ó mixta, moviéndose continuamente en otra direccion, (en un caso tambien por una curva que se mueve continuamente en la misma direccion.) La *superficie curva* es la que puede contener dos puntos de una recta, sin contener todos los puntos de ella. Llamamos *superficie mixta* la compuesta de planos y superficies curvas. La *curva mas importante* es la circunferencia. *Circunferencia* es una curva cerrada cuyos puntos todos equidistan de otro, llamado *centro*.

Division de la geometría.

Se divide la geometría en geometría inferior y superior. La *geometría inferior* se ocupa de rectas y circunferencias, y de superficies y cuerpos que son limitados por rectas y circunferencias. La *geometría superior* trata de líneas, superficies y cuerpos de todo género. Se divide la geometría inferior en geometría plana y geometría del espacio. La *geometría plana* trata de líneas y superficies que están en un mismo plano; miéntras la *geometría del espacio* se ocupa de cantidades extensas que están en dos ó mas planos.

Parte teórica y práctica de la geometría.

La geometría abraza una parte teórica y otra práctica. La *parte teórica* de la geometría consta de axiomas y teoremas. Se llaman *axiomas* las verdades evidentes que no necesitan prueba. *Teoremas* son verdades cuya evidencia se sigue de una prueba. Se distingue en el teorema la hipótesis, la tésis y la demostracion. La *hipótesis* contiene la condicion bajo la que el teorema vale. *Tésis* es la verdad que se infiere de la hipótesis. *Demostracion* es la prueba de la verdad. Son *recíprocos* aquellos teoremas de los cuales el uno tiene por hipótesis y tésis la tésis é hipótesis del otro. La *parte práctica* consta de postulados y problemas. Llamamos *postulados* las cuestiones que exigen solucion, practicable por construcciones muy sencillas. Las *construcciones* ejecutan lo que se ha propuesto. *Problema* es una cuestion que exige solucion, practicable por construcciones mas ó ménos difíciles, las cuales se fundan en las construcciones sencillas de los postulados. *Las partes esenciales de un problema* son la propuesta, construccion y demostracion. *Corolarios* son las consecuencias que se deducen fácilmente de un axioma ó teorema ó postulado ó problema.

Signos.

Los signos que emplea la geometría son los siguientes:

1	$=$	denota	igual.	8	$-$	"	ménos.
2	$\sim$	"	semejante.	9	$\perp$	"	perpendicular.
3	$\cong$	"	congruente ó idéntico.	10	$\ddagger$	"	paralelo.
4	$<$	"	menor.	11	$\sphericalangle$	"	ángulo.
5	$>$	"	mayor.	12	R	"	ángulo recto.
6	$\gtrless$	"	mayor ó menor.	13	$\triangle$	"	triángulo.
				14	$\square$	"	cuadrado.
7	$+$	"	mas.	15	*Rctg.*	"	rectángulo.

Division de la geometría plana.

Las líneas y superficies de que trata la geometría plana, pueden mirarse segun su *posicion y magnitud*, por lo cual se divide la geometría plana en los seis capítulos siguientes:

1. Ángulos, líneas paralelas.
2. Igualdad y desigualdad de las líneas y ángulos:
   A en triángulos.
   B " cuadriláteros.
   C " polígonos.
   D " círculos.
3. Proporcionalidad de las líneas:
   A en triángulos.
   B " cuadriláteros.
   C " polígonos.
   D " círculos.
4. Igualdad y desigualdad de las superficies.
5. Proporcionalidad de las superficies.
6. Áreas de las superficies.

MATEMÁTICAS.

Aritmética. | *Geometría.*

Inferior | *Superior*

Geometría plana | *Geometría del espacio*

Líneas | *Superficies*

Posicion. Magnitud. Cap. 1. Cap. 2 y 3.	Posicion. (Pertenece á la geometría del espacio.)	Magnitud. Cap. 4, 5 y 6.

Axiomas generales.

Hay siete axiomas generales:
1. Toda cantidad es igual á sí misma.
2. Una cantidad se puede poner en lugar de otra igual.
3. Dos cantidades que son iguales á una tercera son iguales entre sí.
4. El todo es igual á sus partes juntas.
5. El todo es mayor que cada una de sus partes.
6. Cada una de las partes es menor que su todo.
7. Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

CAPITULO PRIMERO.

ÁNGULOS, LÍNEAS PARALELAS.

Preliminares.

Acerca de las rectas valen los axiomas siguientes:

1. Por un punto pueden trazarse rectas innumerables.
2. Entre dos puntos hay una sola recta posible.
3. Si dos rectas tienen dos puntos comunes, son idénticas.
4. Si dos rectas tienen una parte comun, son idénticas.
5. Dos rectas pueden cortarse en un solo punto.

Las *rectas son indeterminadamente largas*, si sus límites no están expresamente designados. Las *rectas se designan* siempre por dos letras. Dos *rectas limitadas son iguales*, si poniendo una sobre otra, los dos límites de la una coinciden con los dos de la otra. Una *recta limitada se mide* calculando cuantas veces otra recta está contenida en la primera. La recta con que se mide llamamos *medida de longitud.* La mejor unidad de la medida de longitud es sin duda el *metro.*

Los múltiplos y submúltiplos del metro son:

1	miriámetro	=	10000	metros
1	kilómetro	=	1000	"
1	hectómetro	=	100	"
1	decámetro	=	10	"
1	decímetro	=	0,1	metro
1	centímetro	=	0,01	"
1	milímetro	=	0,001	"

Explicaciones.

Un *ángulo se forma* por dos rectas que se encuentran en un punto. *Ángulo* es la magnitud de la inclinacion de dos rectas que se encuentran en un punto. La *magnitud de un ángulo depende* de la inclinacion de las dos rectas, y no de la magnitud de ellas. *Lados del ángulo* son las dos rectas que le forman. Se llama *vértice del ángulo* el punto en que se encuentran los lados. La *bisectriz* del ángulo es la recta que le divide en dos partes iguales. Los *ángulos se designan por tres letras*, ó si no hay equivocacion, por *una sola.* Designando un ángulo por tres letras, se pone una en el vértice y las demás en los lados, leyendo la del vértice siempre en segundo lugar. Designando un ángulo por una sola letra, se la pone dentro del ángulo cerca del vértice. Los ángulos son iguales, si poniendo uno sobre otro, de modo que coincidan los vértices y un lado del uno con un lado del otro, coinciden tambien los otros lados; ó lo que es lo mismo, si la magnitud de la inclinacion de los lados es la misma. Para *medir un ángulo* se divide la circunferencia de un círculo en 360 partes iguales, y se unen los puntos de division con el centro, por cuyo medio tenemos 360 ángulos pequeños. Cada uno de estos ángulos es la unidad de la *medida de ángulos.* Por esto, si se quiere medir un ángulo cualquiera, se lo pone en el círculo, de modo que coincida el vértice del ángulo con el centro del círculo; los lados del ángulo ó la prolongacion de ellos mostrarán cuantas veces la medida está contenida en el ángulo. La medida del ángulo llamamos *grado.* Los submúltiplos del grado son:

1 grado = 60 minutos

1 minuto = 60 segundos.

Se *dividen los ángulos* respecto de su magnitud en tendidos, cóncavos, convexos, rectos, agudos y obtusos. *Ángulo tendido* es aquel cuyos lados tienen direccion contraria, y que por esto están situados en una recta. Se llama *ángulo cóncavo* el que es menor que el tendido. El *ángulo convexo* es mayor que un tendido. *Ángulo recto* ó simplemente recto es la mitad de un tendido. *Ángulo agudo* es menor que el recto. *Ángulo obtuso* es un ángulo cóncavo, siendo mayor que un recto. Se dividen los ángulos por su posicion en adyacentes y opuestos por el vértice. Llamamos *ángulos adyacentes* aquellos que tienen un lado comun, y cuyos otros dos lados tienen direccion contraria. *Ángulos opuestos por el vértice* son los que tienen el vértice comun, y cuyos lados forman respectivamente rectas. Se dividen los ángulos en órden á su relacion en suplementarios y complementarios. Se llaman *ángulos suplementarios* aquellos cuya suma es igual á dos rectos. Llamamos *ángulos complementarios* los que equivalen á un recto. No es necesario que los ángulos suplementarios ó los complementarios estén unidos, basta que equivalgan á dos, respectivamente á un recto. *Perpendicular* es la línea recta que forma con otra un ángulo recto.

Teoremas.

1. Todos los ángulos tendidos son iguales entre sí.

Hip. $\sphericalangle\, abc$ un tendido.

$\sphericalangle\, def$ un tendido.

Tés. $\sphericalangle\, abc = def.$

Dem. Colocando $\sphericalangle\, abc$ sobre def, de modo que el vértice b coincida con el vértice e, y el lado ba tenga la misma direccion que tiene el lado cd, los otros 2 lados bc y cf tendrán tambien la misma direccion; luego los 2 $\sphericalangle\, abc$ y def coincidirán el uno con el otro, es decir, son iguales.

2. Todos los rectos son iguales entre sí.
Dem. Si los ∢ tendidos son iguales (1), lo serán tambien los RR, por ser la mitad de los tendidos.
3. La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos rectos.
Dem. Los 2 ∢ adyacentes valen juntos un tendido; luego la suma de los 2 es igual á 2 R.
4. (Corolario) El ángulo adyacente á un recto es tambien recto.
Dem. Los 2 ∢ adyacentes valen juntos 2 R; por consiguiente, siendo el uno R, será tambien el otro R.
5. (Cor.) El ángulo adyacente á un ángulo agudo es un obtuso, y el adyacente á un obtuso es un agudo.
Dem. Valiendo los 2 adyacentes 2 R, y siendo uno de los 2 menor (resp. mayor) que 1 R, debe ser el otro mayor (resp. menor) que 1 R.
6. (Cor.) Dos ángulos iguales tienen adyacentes (suplementarios) iguales.
Dem. Cada uno de los 2 ∢ dados forma con su respectivo adyacente 2 R. Pero cantidades iguales, restadas de cantidades iguales, dan resultados iguales, luego....
7. Ángulos opuestos por el vértice son iguales.
Hip. ∢ *aoc* y *bod* opuestos por el vértice.
Tes. ∢ *aoc* = *bod*.

$$\text{Dem. } \sphericalangle\ \left.\begin{aligned} aoc + aod &= 2\text{ R} \\ bod + aod &= 2\text{ R} \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\begin{array}{llcl} \text{luego} & aoc + aod & = & bod + aod \\ \text{pero} & aod & = & aod \\ \text{luego} & aoc & = & bod \end{array}$$

Explicaciones.

Rectas paralelas ó simplemente paralelas son dos ó mas rectas, que por mas que se prolonguen nunca se encuentran. Las rectas no paralelas son *convergentes*, cuando se aproximan, *divergentes*, cuando se separan. Las rectas cortadas por una tercera, llamada *secante*, forman ocho ángulos, cuatro interiores y cuatro exteriores. Los ángulos que están dentro de las dos rectas llamamos *interiores*, los demas *exteriores*. Dos rectas cortadas por una tercera forman cuatro pares de ángulos correspondientes, cuatro pares de alternos y cuatro pares de opuestos. *Ángulos correspondientes* son los que están uno dentro y otro fuera de las dos rectas, á un mismo lado de la secante, y á diferentes vértices. *Ángulos alternos* son aquellos que están dentro ó fuera de las dos rectas, á diferente lado de la secante, y á diferentes vértices. *Ángulos opuestos* son ángulos que están dentro ó fuera de las dos rectas, á un mismo lado de la secante. y á diferentes vértices. En el primer caso se llaman opuestos *interiores*, y en el segundo opuestos *exteriores*.

Teoremas.

8. Si una recta corta á otras dos, de modo que dos ángulos correspondientes ó alternos sean iguales, ó dos opuestos valgan juntos dos rectos; tambien los demas ángulos correspondientes y alternos serán iguales, y los demas opuestos valdrán juntos dos rectos.

Hip. $\sphericalangle\ a = e$ ó $a = h$ ó $a + g = 2$ R

Tés. $\sphericalangle\ b = f$ etc, $b = g$ etc, $b + h = 2$ R etc.

Dem. $\sphericalangle\ a + b = e + f$ (3 y axioma 3)
pero $a = e$ (hip.)
luego $b = f$
etc.

9. Si una recta corta á otras dos, de modo que dos ángulos correspondientes ó alternos sean iguales, ó dos opuestos valgan juntos dos rectos, serán paralelas las dos rectas.

Dem. Por ser (segun la hip. 1.) $\sphericalangle\ agc = chg$, los lados ga y hc tienen la misma inclinacion á cf, y por esto la misma direccion entre sí; luego $ga \ddagger hc$, ó lo que es lo mismo, $ab \ddagger cd$
Segun la hip. 2. tenemos $\sphericalangle\ agc = dhf$
pero $dhf = chg$ (7)
luego $agc = chg$
de modo que tenemos el caso 1.
etc.

10. (Recíproco) Si una recta corta á dos paralelas, todos los ángulos correspondientes y alternos serán iguales, y todos los opuestos valdrán juntos dos rectos.

Dem. Por ser paralelas ag y ch, tienen la misma direccion y la misma inclinacion á cf; ademas ag y ch están al mismo lado de cf, por lo cual $\sphericalangle\ agc = chg$. Pero si $\sphericalangle agc = chg$, todos los ángulos correspondientes y alternos serán iguales, y todos los opuestos valdrán juntos 2 R (8).

11. Si una recta corta á otras dos, de modo que dos ángulos opuestos interiores valgan ménos de dos rectos, las dos rectas cortadas serán convergentes hácia aquel lado, donde están los dos ángulos opuestos.

Hip. $\sphericalangle\ bgh + dhg < 2$ R.

Tés. gb y hd son convergentes.

Dem. Trazando por g la recta mn, de modo que $\sphericalangle\ ngh + dhg = 2$ R, la recta mn debe ser $\ddagger\ cd$ (9). Pero ab cortando mn cortará tambien cd que tiene la misma direccion con mn, y la cortará hácia el lado arriba dicho, porque $\sphericalangle\, bgh < ngh$.

12. (Cor.) Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.

Hip. $ab \pm ef$, $cd \pm cf$. *Tés.* $ab \pm cd$.

Dem. Siendo mn la secante será:

$\sphericalangle\, arm = ets$, y tambien $csr = ets$ (10)

luego $arm = csr$, luego $ab \pm cd$ (9).

13. (Cor.) Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.

Dem. $\sphericalangle\, adc = dfe$, luego $cd \pm ef$ (9).

14. Dos rectas perpendiculares á los lados de un ángulo agudo ú obtuso se cortarán.

Dem. Trazando una recta por d y f tendrémos:

$\sphericalangle\, edf <$ R, y tambien $gfd <$ R.

luego $edf + gfd < 2$ R; luego de y fg se cortarán (11).

15. Dos ángulos con lados respectivamente paralelos son iguales, si los lados del uno y del otro tienen la misma direccion ó direccion contraria.

Dem. Prolongando ab y cf, hasta que se corten en o, tenemos:

$\sphericalangle\, abc = m$, y $\sphericalangle\, def = m$, luego $\sphericalangle\, abc = dcf$.

16. Dos ángulos con lados respectivamente paralelos valen juntos dos rectos, si dos lados paralelos tienen la misma direccion y los otros dos direccion contraria.

Dem. Prolongando ab y dc, hasta que se corten en o, digo que:

$\sphericalangle\, abc = boe = oef$ (10).

pero $oef + def = 2$ R

luego $abc + def = 2$ R

17. Dos perpendiculares levantadas

1) en el vértice de un ángulo agudo ú obtuso, teniendo la misma direccion;

2) en puntos cualesquiera de los lados de un ángulo agudo ú obtuso, con tal que la una esté levantada dentro y la otra fuera del ángulo,

forman un ángulo igual al primero.

Dem. Caso 1.

$\sphericalangle\, abc + eba =$ R y

$\sphericalangle\, dbc + eba =$ R, luego $abc = dbe$

Caso 2. Trazando $bm \ddagger fg$, y $bn \pm de$ será:

$\sphericalangle\, mbn = foh$ (15)

además $mbn = abc$ (caso 1.)

luego $abc = foh$

18. Dos perpendiculares levantadas

1) en el vértice de un ángulo agudo ú obtuso, con tal que tenga direcciones opuestas;

2) en puntos cualesquiera de los lados de un ángulo agudo ú obtuso, estando ambas dentro ó fuera del ángulo, forman con éste dos rectos.

Dem. Caso 1. Prolongando *be* sobre *b* tendrémos:

$\sphericalangle$ *abc* = *dbm* (17 caso 1.)
pero *dbm* + *dbe* = 2 R (3)
luego *abc* + *dbe* = 2 R

Caso 2. Trazando *bm* ⊥ *fg*, y *bn* ⊥ *de* digo que:

$\sphericalangle$ *abc* + *mbn* = 2 R (caso 1.)
pero *mbn* = *dof* (15)
luego *abc* + *dof* = 2 R.

CAPITULO SEGUNDO.

IGUALDAD Y DESIGUALDAD DE LAS LÍNEAS Y ÁNGULOS.

A. *En triángulos.*

Explicaciones.

Figura es una superficie totalmente limitada. *Figura rectilínea* es aquella que es limitada por rectas. Llamamos *lados de la figura rectilínea* las rectas que la limitan. Se llaman *vértices de la figura rectilínea* los puntos en que se encuentran los lados. Los ángulos que están dentro de una figura rectilínea se llaman *ángulos interiores. Ángulos exteriores* son los formados por un lado y la prolongacion de otro lado adyacente. *Perímetro* es la suma de los lados de una figura rectilínea. *Trasversal* es la linea que corta al *perímetro. Triángulo* es una figura rectilínea limitada por tres lados. Llamamos *altura de un triángulo* la perpendicular bajada desde un vértice al lado opuesto ó á su prolongacion. *Base de un triángulo* es el lado sobre el cual se baja la altura. Cada triángulo tiene tres alturas y tres bases. *Mediana* es la trasversal que va desde el vértice de un triángulo á la mitad del lado opuesto. Se *dividen los triángulos* por razon de sus lados en equiláteros, isósceles y escalenos. *Triángulo equilátero* es el que tiene todos sus tres lados iguales. Se llama *triángulo isósceles* el que tiene dos lados iguales; el lado desigual se llama *base* y el vértice opuesto *vértice del triángulo isósceles* El *triángulo escaleno* tiene todos los lados desiguales. Los triángulos se dividen por razon de sus ángulos en rectángulos, acutángulos y obtusángulos. *Triángulo rectángulo* es aquel que tiene un recto. El lado de un triángulo rectángulo que se opone al recto se llama *hipotenusa*, los otros dos lados *catetos*. *Triángulo acutángulo* es aquel cuyos ángulos todos son agudos. El *triángulo obtusángulo* tiene un ángulo obtuso. Las *figuras son congruentes*, si sobrepuestas coinciden. Los lados y ángulos de las figuras congruentes que coinciden llamamos *lados* y *ángulos homólogos*.

Teoremas.

19. El ángulo exterior de un triángulo es igual á la suma de los dos ángulos opuestos interiores.

Tés. $\sphericalangle\, acd = abc + bac$

Dem. Trazando $ce \ddagger ba$ tenemos:

$\sphericalangle\, ace = bac$, y $ecd = abc$ (10)

luego $ace + ecd$ $(acd) = abc + bac$

20. Los tres ángulos interiores de un triángulo valen juntos dos rectos.

Dem. Prolongando bc sobre c será:

$$\sphericalangle\, acd = abc + bac \quad (19)$$
$$acd + acb = abc + bac + acb$$

pero $acd + acb = 2$ R

luego $abc + bac + acb = 2$ R.

21. (Cor.) Un triángulo no puede tener mas de un ángulo recto ú obtuso.

22. (Cor.) Siendo dos ángulos en un triángulo iguales serán agudos.

23. En un triángulo isósceles á los lados iguales se oponen ángulos iguales.

Hip. $ab = ac$ *Tés.* $\sphericalangle\, acb = abc$

Dem. Tomando otro $\triangle\, def = abc$ serán iguales entre sí: ab, ac, de y df; luego tambien ab y df. Ademas $\sphericalangle\, bac = edf$, y por consiguiente podemos poner el uno de los $\triangle$ sobre el otro, de modo que a coincida con d, b con f, y c con e; luego $\sphericalangle$ $abc = dfe$, y por ser acb tambien $= dfe$ (construccion), los $\sphericalangle\, abc$ y acb deben ser iguales.

24. (Recípr.) Un triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.

Dem. Véase el teor. 23.

25. (Cor.) En un triángulo equilátero los tres ángulos son iguales entre sí.

26. En un triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.

Hip. $ac > ab$. *Tés.* $\sphericalangle\, abc > acb$

Dem. Tomando $am = ab$, y uniendo b con m tendremos:

$$\sphericalangle\, abm = amb$$

pero $amb = acb + mbc$ (19)

luego $abm = acb + mbc$

" $abm > acb$ solo

" abc mucho $> acb$

27. (Recípr.) En un triángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado.

Hip. $\sphericalangle\, abc > acb$. *Tés.* $ac > ab$

Dem. Si no fuera $ac > ab$, deberia ser $ac = ab$ ó $< ab$. No puede ser $ac = ab$, porque entónces seria $\sphericalangle\, abc = acb$ (23), lo que es contra la hip.; no puede ser $ac < ab$, porque entónces seria $\sphericalangle\, abc < acb$, lo que es tambien contra la hip.; luego....

28. (Cor.) En un triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor.

29. (Cor.) Bajando desde un punto una perpendicular á una recta, será esta perpendicular la mas corta de todas las rectas que unen aquel punto con la recta.

Dem. Véase el teor. 28.

30. (Recípr.) Trazando varias rectas desde un punto á una recta, la mas corta de todas será perpendicular á ésta.

Hip. $cd < cf$, cg, ch etc. *Tés.* $cd \perp ab$

Dem. Suponiendo que no cd, sino cf sea $\perp ab$, será $\sphericalangle\, cfd = R$; luego $cd > cf$, lo que es contra la hip. y por consiguiente.....

31. (Cor.) Trazando varias rectas desde un punto á una recta, la mas larga es aquella que mas dista de la perpendicular.

Dem. Véanse los teor. 19 y 27.

32. Desde un punto puede bajarse una sola perpendicular á una recta.

Dem. Si hubiera ademas de cd otra $\perp$, por ejemplo cg, tendriamos en el $\triangle\, cdg$ 2 R, lo que es absurdo; luego....

33. (Cor.) En un punto de una recta puede levantarse una sola perpendicular.

34. En un triángulo la suma de dos lados es mayor que el lado tercero.

Tés. $ac + cb > ab$

Dem. Prolongando ac sobre c, de modo que $cm = cb$, y uniendo m con b tendremos:

$$\sphericalangle\, cbm = cmb \quad (23)$$

luego $abm > cmb$, y por consiguiente $am > ab$ (27).

pero $am = ac + cb$, luego $ac + cb > ab$

35. En un triángulo la diferencia de dos lados es menor que el lado tercero.

Tés. $ac - cb < ab$

Dem. Tomando $cm = cb$, y uniendo m con b, será:

$$\sphericalangle\ cbm = cmb\ (23)$$
$$cbm + abm < cmb + amb$$
luego $abm < amb$

" $am < ab$

pero $am = ac - cb$, luego $ac - cb < ab$

36. Si dos triángulos tienen un lado comun y los otros hácia un mismo frente, de modo que el uno comprenda al otro, la suma de los lados que mas se aparten del comun es mayor que los del mas próximo.

Tes. $ab + bc > ad + dc$

Dem. Prolongando ad, hasta que corte bc en m, tendremos:

$$dm + mc > dc$$
por esto $ad + dm + mc > ad + dc$

pero $ab + bm > ad + dm$

luego $ab + bm + mc > ad + dm + mc$

" $ab + bm + mc > ad + dc$

" $ab + bc > ad + dc$

37. Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros tambien serán iguales.

Dem. Véase el teor. 20.

38. Dos triángulos son congruentes, si tienen un lado igual y los ángulos adyacentes á este respectivamente iguales. (1. teor. de la congruencia.)

Hip. $bc = ef$, $\sphericalangle\ abc = def$, $< acb = dfe$

Tes. $\triangle\ abc \cong def$

Dem. Colocando $\triangle\ abc$ sobre def, de modo que bc coincida con ef, $\sphericalangle\ abc$ con def, y $\sphericalangle\ acb$ con dfe, tendrá ba la direccion que tiene ed, y ca la de fd; luego a coincidirá con d, es decir $\triangle\ abc \cong def$.

39. (Cor.) Dos triángulos son congruentes, si tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera respectivamente iguales.

Dem. Véase el teor. 37.

40. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen respectivamente iguales un cateto y un ángulo agudo.

41. (Cor.) Dos triángulos isósceles son congruentes, si tienen iguales la base y un ángulo adyacente á esta.

42. (Cor.) Las perpendiculares, bajadas desde cualquier punto de la bisectriz de un ángulo á los lados de este, son iguales entre sí.

Dem. $\triangle\ bdo \cong bco$, luego $od = oc$ (39)

43. Dos triángulos son congruentes, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido. (2. teor. de la congruencia).

Hip. $ab = de$, $ac = df$, $\sphericalangle\, bac = edf$

Tés. $\triangle\, abc \cong def$

Dem. Colocando $\triangle\, abc$ sobre def, de modo que a coincida con d, y ab caiga sobre de, caerá tambien ac sobre df, por ser $\sphericalangle\, bac = edf$. Ademas coincidirán b con e, y c con f, pues $ab = de$, y $ac = df$; luego $\triangle\, abc \cong def$.

44. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen los catetos respectivamente iguales.

45. (Cor.) Dos triángulos isósceles son congruentes, si tienen respectivamente iguales uno de los lados iguales y el ángulo del vértice.

46. Dos triángulos son congruentes, si tienen los tres lados respectivamente iguales. (3. teor. de la congruencia).

Dem. Siendo bc y ef los lados mayores colocarémos $\triangle\, abc$ al lado def, de modo que bc coincida con ef, y que a (m) caiga á diferente lado que d; uniendo m con d serán:

$$ed = em, \text{ y } fd = fm$$

luego $\sphericalangle\, edm = emd$, y $\sphericalangle\, fdm = fmd$

" $\quad edf = emf = bac$

" $\quad \triangle\, edf \cong emf \cong abc$

47. (Cor.) Dos triángulos isósceles son congruentes, si tienen respectivamente iguales la base y uno de los lados iguales.

48. (Cor.) Dos triángulos equiláteros son congruentes, si tienen un lado igual.

49. (Cor.) Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los puntos extremos de lados iguales.

Dem. Véase el teor. 43.

50. (Recípr.) Todo punto que equidista de los puntos extremos de lados iguales de un ángulo, está situado en la bisectriz del ángulo.

51. Dos triángulos son congruentes, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo que se opone al mayor de estos. (4. teor. de la congruencia).

Hip. $ab = de$, $ac = df$, $ab > ac$, $de > df$, $\sphericalangle\, acb = dfe$

Tés. $\triangle\, abc \cong def$

Dem. Poniendo $\triangle\, abc$ sobre def, de modo que c coincida con f, y ca con fd, caerá cb sobre fe. El vértice b caerá ó en e, ó dentro de ef, ó fuera de ef. No puede caer dentro de ef, p. e. en m, pues entónces tendríamos:

$$dm = ab = de$$

luego $\sphericalangle\, dem = dme$ (23)

pero $\quad dme > dfm$ (19)

luego $\quad dem > dfm$

" $\quad df > de$, lo que es contra la hip.

El vértice b no puede caer fuera de ef, p. e. en n, pues entonces tendríamos....

Si b no puede caer ni dentro ni fuera de ef, caerá precisamente en e; luego los 3 vértices del uno coincidirán con los 3 del otro $\triangle$, por lo cual $\triangle\ abc \cong def$

52. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto.
53. (Cor.) Dos triángulos isósceles son congruentes, si tienen iguales uno de los dos lados y uno de los dos ángulos iguales.
54. (Cor.) La bisectriz del ángulo del vértice en un triángulo isósceles es perpendicular á la base y la divide en partes iguales.

Dem. Véase el teor. 43.

55. (Recípr.) La recta que une el punto medio de la base con el vértice en un triángulo isósceles es perpendicular á la base y al mismo tiempo bisectriz del ángulo del vértice.

Dem. Véase el teor. 46.

56. (Recípr.) La perpendicular, bajada desde el vértice de un triángulo isósceles á la base, divide á la base y al ángulo del vértice en partes iguales.

Dem. Véase el teor. 51.

57. (Recípr.) La perpedicular, levantada en el punto medio de la base en un triángulo isósceles, pasa por el vértice y divide al ángulo de él en partes iguales.

Dem. Suponiendo que de, no pase por a, y que sea la $\perp$, podremos trazar una recta desde d que pase por a. Esta recta será $\perp$ á bc y dividirá $\sphericalangle\ bac$ en partes iguales (55); luego de no puede ser $\perp$ á bc, y por consiguiente....

58. (Recípr.) Cualquier punto de la perpendicular, levantada en el punto medio de una recta, equidista de los extremos de esta.

Dem. Véase el teor. 43.

59. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y desiguales los ángulos comprendidos; al mayor de estos se opondrá el mayor lado.

Hip. $ac = df$, $bc = ef$, $\sphericalangle\ acb > dfe$. *Tés.* $ab > de$

Dem. Poniendo $\triangle\ def$ sobre abc, de modo que coincida ef con bc, caerá df dentro del $\sphericalangle\ acb$. El punto d puede caer ó en ab, ó fuera del $\triangle\ abc$, ó dentro de él.

Caso 1. Cáyendo d en ab, p. e. en m es claro que $ab > mb > de$

Caso 2. Cayendo d fuera del $\triangle\ abc$, p. e. en n, juntaremos n con a y con b, y tendremos:

$$ac = nc = df$$

luego $\sphericalangle\ anc = nac$

pero $nac > nab$

luego $anc > nab$

" anb mucho $> nab$, luego $ab > nb > de$

Caso 3. Cayendo d dentro del $\triangle\, abc$, p. e. en o, juntaremos o con a y con b, y tendremos:

$$ac = oc = df$$

luego $\sphericalangle\, aoc = oac$

" $aoc <$ R (22), ademas $boc < 2$ R

" $aoc + boc < 3$ R

" $aob >$ R, y $bao <$ R (20)

de donde $ab > ob > de$

60. (Recípr.) Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el tercero, se opondrá al mayor lado el mayor ángulo.

Dem. Los 2 $\sphericalangle$ no pueden ser iguales, porque en este caso serian congruentes los $\triangle$; ademas el $\sphericalangle$ que se opone al mayor lado, no puede ser el menor, de otra manera el lado correspondiente seria el menor (59), lo que es contra la hip.; luego...

61. Si en dos triángulos rectángulos las hipotenusas son iguales, pero un cateto en el uno es mayor que uno en el otro; serán desiguales tambien los otros dos catetos, y de los dos el menor el que está al lado del mayor.

Hip. $bc > bd$. *Tés.* $ac < ad$.

Dem. Poniendo los 2 $\triangle$ el uno al lado del otro, de modo que coincidan las 2 hipotenusas y trazando cd, tendremos:

$\sphericalangle\, bdc < bcd$ (26)

pero $bdc + adc = bcd + acd$

luego $adc < acd$

" $ac < ad$ (27)

B. *En cuadriláteros.*

Explicaciones.

Cuadrilátero es una figura rectilínea, limitada por cuatro lados. Llamamos *paralelógramo* el cuadrilátero, cuyos lados opuestos son paralelos. *Rombo* es un paralelógramo, cuyos lados son iguales. *Rectángulo* es un paralelógramo cuyos ángulos son rectos. *Cuadrado* es un paralelógramo que tiene lados iguales y ángulos rectos. *Trapecio* es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Llamamos *trapecio isósceles* aquel cuyos lados no paralelos son iguales. *Trapezoide* es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos. Se llama *altura de un cuadrilátero* la perpendicular entre dos lados paralelos, los cuales llamamos *bases*. *Diagonal* es la trasversal que pasa por dos vértices opuestos.

Teoremas.

62. En todo cuadrilátero la suma de los cuatro ángulos es igual á cuatro rectos.

Dem. Véase el teor. 20.

63. En un paralelógramo la suma de dos ángulos consecutivos es igual á dos rectos.

Dem. Véase el teor. 10.

64. (Recípr.) Si en un cuadrilátero la suma de dos ángulos consecutivos es igual á dos rectos; el cuadrilátero será un paralelógramo.

Dem. Véase el teor. 9.

65. En un paralelógramo los dos ángulos no consecutivos son iguales entre sí.

Dem. $\sphericalangle\ bad + abc = bad + adc$
pero $bad = bad$
luego $abc = adc$

66. (Recípr.) Si en un cuadrilátero los dos ángulos no consecutivos son iguales entre sí; el cuadrilátero será un paralelógramo.

Dem. $\sphericalangle\ bad = bcd$ y $abc = adc$
luego $bad + abc = bcd + adc = 2$ R (62)
" $ad \ddagger bc$
etc.

67. (Cor.) Si en un paralelógramo un ángulo es recto, todos serán rectos.

68. La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos congruentes.

69. En un paralelógramo los lados opuestos son iguales entre sí.

Dem. Trazando un diagonal, véase el teor. 68.

70. (Recípr.) El cuadrilátero en que los lados opuestos son iguales entre sí, es paralelógramo.

71. El cuadrilátero en que dos lados opuestos son iguales y paralelos, es paralelógramo.

72. Las diagonales del paralelógramo se dividen mútuamente en dos partes iguales.

Dem. $\triangle\ aob \cong cod$; luego....

73. (Recípr.) Si en un cuadrilátero las diagonales se dividen mútuamente en dos partes iguales, el cuadrilátero será paralelógramo.

Dem. $\triangle\ ado \cong bco$, y $\triangle\ abo \cong dco$ luego....

74. En el rombo las diagonales son perpendiculares.

75. (Recípr.) El paralelógramo que tiene diagonales perpendiculares es rombo.

76. En un rectángulo las diagonales son iguales entre sí.

Dem. $\triangle\ abc \cong abd$; luego....

77. (Recípr.) El paralelógramo que tiene diagonales iguales, es rectángulo.

Dem. $\triangle\ abc \cong abd$; luego $\sphericalangle\ abc = bad$
ademas $\sphericalangle\ abc + bad = 2\ R$
luego $\sphericalangle\ abc \qquad = 1\ R$; luego....

78. En un trapecio la suma de los dos ángulos adyacentes á cada uno de los lados no paralelos es igual á dos rectos.

Dem. Prolongando *da* sobre *a* será $\sphericalangle\ adc = lab$, luego....

79. En un trapecio los lados paralelos no pueden ser iguales.

Dem. Véase el teor. 71.

80. En un trapecio los dos ángulos adyacentes al menor de los lados paralelos valen juntos mas de dos rectos, los otros dos ménos de dos rectos.

Dem. Trazando por *b* una paralela á *ad* tendremos:

1) $\sphericalangle\ bad + abm \qquad = 2\ R$
luego $bad + abm + cbm > 2\ R$

2) $\sphericalangle\ adc + bmd \qquad = 2\ R$
pero $bmd > bcd$
luego $adc + \qquad bcd < 2\ R$

81. En un trapecio, cuyos lados no paralelos son iguales, serán iguales entre sí los dos ángulos adyacentes á cada uno de los lados paralelos.

Dem. Trazando $bm \mp ad$ será:

1) $bm = ad$
pero $ad = bc$ (hip.)
luego $bm = bc$
" $\sphericalangle\ bmc = bcd$
pero $bmc = adc$
luego $adc = bcd$

2) Trazando otra paralela *an* á *bo* será:
$\sphericalangle\ dan = cbm$ (15)
ademas $ban = bcn$, y $abm = adm$ (65)
pero $bcn = \qquad adm$
luego $ban = abm$
" $ban + dan = abm + cbm$
ó $bad \quad = \quad abc$

82. (Recípr.) Un trapecio en que los ángulos adyacentes á cada uno de los lados paralelos son iguales entre sí, es isósceles.

Dem. Siendo $bm \mp ad$ tendremos:
$\sphericalangle\ adm = bcm$ (hip.)
pero $adm \qquad = bmc$
luego $bcm = bmc$
" $bm = \quad bc$

pero $bm = ad$
luego $bc = ad$

83. Si por el punto medio de uno de los lados no paralelos del trapecio se traza una paralela á los lados paralelos; el cuarto lado quedará dividido en dos partes iguales, y ademas la recta trazada será la semisuma de los lados paralelos.

Tés. $bg = gc$, $fg = \frac{ab + dc}{2}$

Dem. Trazando por g la recta $hi \mathrel{+\!\!\!\!\!\;=} ad$, y prolongando ab, hasta que corte hi en m, tendremos:

1) $af = mg$, y $fd = gi$, por esto $\triangle\, bgm \cong cgi$ (38)
de donde $bg = gc$

2) ademas $fg = ab + bm = dc - ic$
luego $2fg = ab + bm + dc - ic$
pero $bm = ic$
luego $2fg = ab + dc$
» $fg = \frac{ab + dc}{2}$

84. Dos cuadriláteros son congruentes, si tienen respectivamente iguales dos lados consecutivos, el ángulo comprendido y los ángulos adyacentes á aquellos lados. (1. teor. de la congr.)

Hip. $ab = fg$, $ad = fi$
$\sphericalangle\ bad = gfi$, $abc = fgh$, $adc = fih$

Tés. $abcd \cong fghi$

Dem. Colocando $abcd$ sobre $fghi$, de modo que a coincida con f, ab con fg, y ad con fi, tendrá bc la misma direccion que tiene gh, y dc la de ih, porque $\sphericalangle\ abc = fgh$, y $\sphericalangle\ adc = fih$; luego c coincidirá con h, por lo cual todos los vértices del uno coincidirán con todos los del otro cuadrilátero; por consiguiente $abcd \cong fghi$.

85. (Cor.) Dos trapecios son congruentes, si tienen respectivamente iguales dos lados consecutivos, el ángulo comprendido, y el otro án ulo adyacente al lado paralelo.

86. (Cor.) Dos paralelógramos son congruentes, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido.

87. (Cor.) Dos rombos son congruentes, si tienen iguales un lado y un ángulo.

88. (Cor.) Dos rectángulos son congruentes, si tienen iguales dos lados consecutivos.

89. (Cor.) Dos cuadrados son congruentes, si tienen un lado igual.

90. Dos cuadriláteros son congruentes, si tienen respectivamente iguales tres lados y los dos ángulos comprendidos (2. teor. de la congrucrcia.)

Hip. $ab = fg$, $bc = gh$, $cd = hi$

$\sphericalangle\ abc = fgh,\ bcd = ghi$

Tes. $abcd \cong fghi$

Dem. Colocando $abcd$ sobre $fghi$, de modo que bc coincida con gh, ab con fg, y cd con hi, caerá tambien ad sobre fi; luego $abcd \cong fghi$.

C. En polígonos.

Explicaciones.

Polígono es una figura rectilínea limitada por cinco ó mas lados. Se llama *regular* un *polígono*, si todos los lados y ángulos son iguales.

Teoremas.

91. En un polígono de n lados la suma de todos los ángulos interiores es igual á $n\ 2\ R - 4\ R$

Dem. Trazando desde un vértice todas las diagonales posibles tendremos:
$(n-2)\ \triangle$, cuyos $\sphericalangle$ sumados equivalen á los $\sphericalangle$ interiores del polígono. La suma de los $\sphericalangle$ de los $(n-2)\ \triangle = (n-2)\ 2\ R$, ó $n\ 2\ R - 4\ R$, luego la suma de los $\sphericalangle$ interiores del polígono tendrá el mismo valor.

92. En un polígono de n lados la suma de todos los ángulos exteriores es igual á cuatro rectos.

Dem. Cada $\sphericalangle$ exterior vale con su respectivo interior 2 R; luego la suma de todos los $\sphericalangle$ exteriores é interiores es igual á $n\ 2\ R$. Pero la suma de los $\sphericalangle$ interiores es igual á $n\ 2\ R - 4\ R$; restando este valor de n 2 R tendremos:
$n\ 2\ R - (n\ 2\ R - 4\ R) = n\ 2\ R - n\ 2\ R + 4\ R = 4\ R.$

93. En un polígono regular de n lados cada ángulo interior vale $2\ R - \frac{4\ R}{n}$

Dem. En todo polígono la suma de los ángulos interiores es igual á $n\ 2\ R - 4\ R$, por consiguiente cada uno de los ángulos (iguales) de un polígono regular valdrá $\frac{n\ 2\ R - 4\ R}{n}$ ó $2\ R - \frac{4\ R}{n}$

94. Dos polígonos de n lados son congruentes, si tienen respectivamente iguales $n - 2$ lados consecutivos, los ángulos comprendidos y los ángulos adyacentes á aquellos lados. (1 teor. de la congruencia).

95. (Cor.) Dos polígonos regulares de n lados son congruentes, si tienen un lado igual.
96. Dos polígonos de n lados son congruentes, si tienen respectivamente iguales $n - 1$ lados y los ángulos comprendidos. (2 teor. de la congruencia).
97. Las diagonales, trazadas desde vértices homólogos de polígonos congruentes, dividen los polígonos en triángulos congruentes.

Dem. $\triangle\, acd \cong fli$ (43)
$\triangle\, adc \cong fih$ (43), pues $ad = fi$, $dc = ih$, $\sphericalangle\, adc$ (la diferencia del $\sphericalangle\, edc$ y eda) $= fih$ (la diferencia del $\sphericalangle\, lih$ y lif).
etc.

D. *En círculos.*

Explicaciones.

Llamamos *círculo* la figura limitada por una circunferencia. *Radios* del círculo son las rectas que unen el centro con cualquier punto de la circunferencia. Se llama *cuerda* toda recta que une dos puntos de la circunferencia. *Diámetro* es la cuerda que pasa por el centro. *Tangente* es la recta que aun prolongada indefinidamente tiene un solo punto comun con la circunferencia. *Secante* es una recta ilimitada que corta la circunferencia en dos puntos. Llamamos *arco* una parte cualquiera de la circunferencia. El ángulo cuyo vértice está en el centro se llama *ángulo central. Ángulo tangencial* es aquel que está formado por dos tangentes. *Ángulo inscrito* es aquel cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son cuerdas. Se llama *ángulo semiinscrito* aquel cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados son una tangente y una cuerda. *Sector* es una parte del círculo limitada por dos radios y un arco. Llámase *segmento* la parto del círculo limitada por una cuerda y un arco. Una *figura rectilínea está circunscrita* á una circunferencia, si todos sus lados son tangentes á ella. Una *figura rectilínea está inscrita* en una circunferencia, si todo sus vértices están en ella. Dos círculos que tienen el mismo centro, pero radios diferentes, se llaman *concéntricos*. Se llaman *círculos excéntricos* aquellos que tienen diferentes centros. Dos círculos excéntricos pueden tocarse ó cortarse ó ni uno ni otro. *Dos círculos se tocan*, si tienen un solo punto comun. *Se tocan interiormente*, cuando el uno está dentro del otro. *Se tocan exteriormente*, cuando el uno está fuera del otro. Dos círculos excéntricos *se cortan* cuando tienen dos puntos comunes en la circunferencia. Dos círculos excéntricos que no se tocan ni se cortan, pueden estar el uno dentro del otro ó fuera de él. *Línea central* es la recta que une los centros de dos círculos.

Preliminares.

Aquí tenemos que observar tres axiomas:

1) Estando un punto en la circunferencia ó dentro ó fuera de un círculo, su distancia del centro es igual ó menor ó mayor que el radio del mismo círculo.
2) Siendo la distancia entre un punto y el centro de un círculo igual ó menor ó mayor que el radio, está aquel punto en la circunferencia ó dentro ó fuera del círculo.
3) Una recta ilimitada trazada por un punto dentro del círculo corta la circunferencia dos veces.

Teoremas.

98. Todos los radios del mismo círculo son iguales entre sí.
Dem. Radio es la recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. Pero todos los puntos de esta equidistan del centro, luego....

99. (Cor.) Todos los diámetros del mismo círculo son iguales entre sí.

100. Una recta cortará la circunferencia dos veces, si la distancia entre ella y el centro es menor que el radio.
Dem. Siendo *ao* la distancia entre *pq* y *o*, el punto *a* estará dentro del círculo (axioma); luego, por ser limitado el círculo é ilimitada la recta *pq*, ha de pasar *pq* á lo ménos dos veces la circunferencia. Digo á lo ménos 2 veces; pues fuera de *b* y *c* no puede tener *pq* otro punto comun con la circunferencia. Si *m* está dentro de *a* y *c*, $\sphericalangle$ *omb* $>$ *ocb*, luego tambien $>$ *obc*, y por consiguiente *ob* $>$ *om*, de donde se sigue que *m* estará dentro del círculo (axioma). De la misma manera puede demostrarse que cada punto de la prolongacion de *bc*, p. e. *n*, ha de estar fuera del círculo.

101. Una recta tendrá un solo punto comun con la circunferencia, si la distancia entre ella y el centro es igual al radio.
Dem. La distancia entre *rs* y *o* (*bo*) es igual al radio, por lo cual *b* será punto comun de la circunferencia y de *rs*. Todos los demas puntos de *rs*, por ej. *c*, estará fuera del círculo, porque uniendo *c* con *o* será *co* la hipotenusa del $\triangle$ *bco;* luego....

102. Una recta no tendrá ningun punto comun con la circunferencia, si la distancia entre ella y el centro es mayor que el radio.

Dem. Si d está fuera del círculo, lo será tambien c; luego....

103. La perpendicular, bajada desde el centro á la cuerda, divide á esta en partes iguales.

104. (Recípr.) La recta que une el centro con el punto medio de la cuerda está perpendicular á esta.

105. (Recípr.) La perpendicular, levantada á la cuerda en su punto medio, pasa por el centro.

Dem. La recta que une el centro con el punto medio de la cuerda será perpedicular á esta, luego....

106. La perpendicular, bajada desde el centro á la tangente, pasa por el punto de contacto.

Dem. Uniendo o con c, el único punto comun que tiene la tangente con la circunferencia, será oc radio, y por esto segun el teor. 101 la distancia entre o y ab, es decir la $\perp$; por consiguiente la $\perp$ desde o á ab pasará por c.

107. (Recípr.) La recta que une el centro con el punto de contacto de la tangente está perpendicular á esta.

Dem. Suponiendo que oc no sea $\perp$ á ab, sino p. e. om, seria $\sphericalangle omc = R$, y por esto $om < oc$; luego el punto m estaria dentro del círculo, lo que es inposible.

108. (Recípr.) La perpendicular, levantada á la tangente en su punto de contacto, pasa por el centro.

109. (Recípr.) La perpendicular, levantada al radio en su punto extremo, es tangente.

Dem. c está situado en la circunfencia; uniendo o con cualquier otro punto de ab, p. e. con m, será $om > oc$ (27), luego m estará fuera del círculo, y por consiguiente ab será tangente.

110. Cuerdas iguales equidistan del centro.

Tés. $op = oq$

Dem. Uniendo o con a y c será:

$\triangle aop \cong coq$, pues $oa = oc$, $ap = cq$ (103) y $\sphericalangle apo = cqo$; luego $op = oq$.

111. (Recípr.) Las cuerdas equidistantes del centro son iguales entre sí.

Hip. $op = oq$, $op \perp ab$, $oq \perp cd$. *Tés.* $ab = cd$.

Dem. Juntando o con a y c tendremos:

$\triangle$ $aop \cong coq$ (52), luego $ap = cq$

pero $ap = \frac{1}{2} ab$, y $cq = \frac{1}{2} cd$

luego $ab = cd$

112. La mayor de dos cuerdas está mas cerca del centro.

Hip. $ab > cd$. *Tés.* $oq < or$.

Dem. Siendo $am = cd$, y $os \perp am$ serán:

$os > ot > oq$, pero $os = or$ (110); luego

$or > oq$ ó $oq < or$

113. (Recípr.) De dos cuerdas es la mayor la que mas se acerca al centro.

Hip. $oq < or$. *Tés.* $ab > cd$

Dem. ab no puede ser $= cd$ (110), ni $< cd$ (112); luego $ab > cd$.

114. De todas las cuerdas, trazadas por un punto dentro del círculo, es la mayor la que pasa por el centro, y la menor la que está perpendicular á esta.

Tés. ab la mayor, cd la menor de todas las cuerdas que pasan por p.

Dem. ab es la mayor, porque la distancia entre su punto medio y el centro es cero; cd es menor que cualquier otra p. c. que mn, pues trazando $or \perp mn$ será $op > or$.

115. Si dos tangentes se cortan, serán iguales las partes que están dentro del vértice y de los puntos de contacto; ademas la recta que une el vértice con el centro dividirá al ángulo tangencial en partes iguales.

Dem. Uniendo o con d y h será $\triangle\, bdo \cong bho$; luego $bd = bh$, y $\sphericalangle\, dbo = hbo$

116. (Cor.) En un cuadrilátero circunscrito á una circunferencia la suma de dos lados opuestos es igual á la de los otros dos.

117. Ángulos centrales iguales de circulos iguales tienen cuerdas, arcos, sectores y segmentos iguales.

Hip. $ao = cp$, $\sphericalangle\, aob = cpd$

Tés. $ab = cd$, arc. $agb = chd$, sect. $agboa = chdpc$, segm. $agb = chd$.

Dem. $\triangle\, abo \cong cdp$; luego $ab = cd$; etc.

118. (Recípr.) En circumferencias iguales ó en una misma circunferencia cuerdas iguales tienen tambien iguales los ángulos centrales, arcos, sectores y segmentos, si los arcos son ó mayores ó menores que la semicircunferencia, y los segmentos ó mayores ó menores que el semicírculo.

119.—121. NB. Otros tres teoremas recíprocos tendremos tomando por tésis la igualdad de los arcos ó sectores ó segmentos.

122. En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia á mayor ángulo central corresponden tambien mayor cuerda, mayor arco, mayor sector y mayor segmento.

Hip. $ao = cp$, $\sphericalangle\, aob > cpd$.

Tés. $ab > cd$, arc. $agb > chd$ etc.

Dem. Colocando p en o, y pc sobre oa, y arc. chd en la direccion del arc. agb, caerá d entre a y b, por ej. en m; uniendo m con o y a tendremos:

$\sphericalangle aob > aom$ (cpd)

luego $ab > am$ (cd) (59)

etc.

123. (Recípr.) En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia á mayor cuerda corresponden mayor ángulo central, mayor arco, mayor sector y mayor segmento, si los arcos son ó mayores ó menores que la semicircunferencia, y los segmentos ó mayores ó menores que le semicírculo.

124.—126. NB. Otros tres teoremas recíprocos tendremos tomando por tésis la mayoría de los arcos ó sectores ó segmentos.

127. El ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo central formado sobre el mismo arco.

Tés. $\sphericalangle\, abc = \frac{1}{2}\, aoc$.

Dem. Caso 1. El centro esté en un lado del $\sphericalangle$ inscrito.

$\sphericalangle\, aoc = abc + bco$; pero $abc = bco$
luego $aoc = 2\, abc$, ó $abc = \frac{1}{2}\, aoc$

Caso 2. Estando el centro dentro del $\sphericalangle$ inscrito, tracemos la recta *bom* y tendremos:

$\sphericalangle\, abm = \frac{1}{2}\, aom$, y $cbm = \frac{1}{2}\, com$ (caso 1)
luego $abm + cbm = \frac{1}{2}\, (aom + com)$
ó $\quad abc \quad = \frac{1}{2} \quad aoc$

Caso 3. Si está el centro fuera del $\sphericalangle$ inscrito, tracemos la recta *bon* y serán:

$\sphericalangle\, nbc = \frac{1}{2}\, noc$, y $nba = \frac{1}{2}\, noa$ (caso 1.)
luego $nbc - nba = \frac{1}{2}\, (noc - noa)$
ó $\quad abc \quad = \frac{1}{2} \quad aoc$

128. (Cor.) El ángulo inscrito sobre la semicircunferencia es recto.

Tés. $\sphericalangle\, abc = R$.

Dem. Trazando la recta *bod* tendremos:

$\sphericalangle\, abd = \frac{1}{2}\, aod$, y $\sphericalangle\, cbd = \frac{1}{2}\, cod$
luego $abd + cbd = \frac{1}{2}\, (aod + cod)$
ó bien $\quad abc \quad = \frac{1}{2} \quad aoc \quad = R$.

129. Ángulos inscritos sobre el mismo arco son iguales entre sí.

130. (Recípr.) Si en circunferencias iguales ó en una misma circunferencia dos ángulos inscritos son iguales; estarán formados sobre arcos iguales.

131. (Recípr.) Los vértices de ángulos iguales, formados sobre la misma recta, y los puntos extremos de esta están situados en la misma circunferencia.

132. El ángulo semiinscrito es igual al ángulo inscrito, formado sobre la cuerda del primero y situado en el segmento contrario.

Tés. $\sphericalangle\, bad = acd$

Dem. Trazando el diámetro *aoe* y juntando *e* con *d* serán:

$\sphericalangle\, bad + dae = R$, y $aed + dac = R$
luego $bad = acd$
pero $\quad acd = acd$
luego $bad \quad = acd$

133. En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la suma de dos ángulos no consecutivos es igual á dos rectos.

Dem. Trazando los radios *ao* y *oc* serán:

$\sphericalangle$ *abc* $= \frac{1}{2}$ convexo *aoc*, y $\sphericalangle$ *adc* $= \frac{1}{2}$ cóncavo *aoc* (127)
luego *abc* + *adc* $= \frac{1}{2}$ (convexo *aoc* + cóncavo *aoc*)
ó $= 2\ R.$

134. Un ángulo, formado sobre la cuerda de un ángulo inscrito, será mayor ó menor que este, segun cae el vértice dentro ó fuera del círculo.

Tés. 1) *abc* > *adc*, 2) *abc* < *adc*.

Dem. 1) Prolongando *ab*, hasta que corte la circunferencia en *m*, y uniendo *m* con *c* tendremos:

$\sphericalangle$ *abc* > *amc*
pero *amc* = *adc*
luego *abc* > *adc*

2) Trazando *cn*
será:

$\sphericalangle$ *abc* < *anc*
pero *anc* = *adc*
luego *abc* < *adc*

135. Al rededor de todo triángulo se puede trazar una circunferencia, de modo que los tres vértices estarán en ella; el centro será el punto, donde se cortan las perpendiculares, levantadas á dos lados en sus puntos medios.

Tés. El punto *o* equidista de *a*, *b* y *c*

Dem. Uniendo *o* con *a*, *b* y *c* será:

$\triangle$ *aog* $\cong$ *bog;* luego *ao* = *bo*
$\triangle$ *aoh* $\cong$ *coh;* „ *ao* = *co*, por consiguiente...

136. (Cor.) Al rededor de un triángulo puede trasarse una sola circunferencia, en la cual están los tres vértices.

137. (Cor.) Tres puntos que no están en línea recta, determinan la posicion de una circunferencia.

138. En todo triángulo podemos trazar una circunferencia, de suerte que los tres lados serán tangentes de ella; el centro será el punto, en que se encuentran las bisectrices de dos ángulos.

Tés. El punto *o* equidista de *ab*, *bc* y *ac*.

Dem. Bajanda desde *o* las perpendiculares *om*, *on* y *or* tendremos:

$\triangle$ *aom* $\cong$ *aor;* luego *mo* = *ro*
$\triangle$ *bom* $\cong$ *bon;* „ *mo* = *no*, y por esto...

139. (Cor.) En un triángulo se puede trazar una sola circunferencia que toque los tres lados.

140. En todo polígono regular puede trazarse una circunferencia, de modo que todos los lados serán tangentes de ella. El cen-

tro será el punto, en que se encuentran las bisectrices de dos ángulos interiores.

Dem. om y on sean las distancias entre o y los lados ab y bc. Por ser $\triangle\, bom \cong bon$ tendremos que $om = on$. De la misma manera podemos demostrar que las demas distancias entre o y los lados del polígono serán iguales; luego...

141. Al rededor de todo polígono regular se puede trazar una circunferencia, de suerte que todos los vértices estarán en ella. El centro será el punto en que se cortan las perpendiculares, levantadas á dos lados en sus puntos medios.

Dem. $\triangle\, aom \cong bom$, luego $ao = bo$ etc.

142. Círculos son congruentos, si tienen iguales los radios.

Dem. Colocando los dos círculos el uno sobre el otro, de modo que o coincida con p, y r con s, coincidirán tambien las dos circunferencias; pues de otra manera no serian iguales todos los radios del uno á todos los del otro círculo.

143. (*Cor.*) Los radios de círculos congruentes son iguales entre sí.

144. Si dos circunferencias tienen un punto comun en un lado de la línea central, lo tienen tambien en el otro.

Hip. o y p los centros de los círculos que tienen el punto a comun.

Tés. Hay otro punto comun en el otro lado de op.

Dem. Bajando desde a una $\perp$ á op y prolongando esta $\perp$ ac hasta b, de modo que $bc = ac$, digo que las circunferencias se cortarán tambien en b. Pues juntando o con a y b, y p con a y b tendremos:

$\triangle\, apc \cong bpc$, y $aoc \cong boc$

luego $ap = bp$, y $ao = bo$,

de donde se infiere que b es un punto que pertenece á ambas circunferencias.

145. (*Cor.*) La cuerda comun á dos círculos es perpendicular á la central y queda dividida por esta en dos partes iguales.

Tés. $ab \perp op$, $ac = bc$.

Dem. $\triangle\, aop \cong bop$ (46); luego $\sphericalangle\, apc = bpc$

y por esto $\triangle\, apc \cong bpc$ (43) luego $ac \perp op$, y $ac = bc$.

146. Si dos círculos se tocan, la línea central ó la prolongacion de esta pasará por el punto de contacto.

Dem. Pueden ocurrir 2 casos:

Caso 1. Los círculos se toquen exteriormente.

Suponiendo que ab no pase por c, sino que corte las circunferencias en d y e, podríamos trazar las rectas ac y bc, y serian:

$$ac = ad, \text{ y } bc = be$$

luego $ac + bc = ad + be$

" $\quad ac + bc < ad + be + de$

ó $ac + bc < ab$ lo que es absurdo (34), luego ab debe pasar por c.

Caso 2. Los círculos se toquen interiormente.

Supongamos que la línea central ab no pase por c, sino que corte las circunferencias en e y d, trazemos ac y bc, y serán:

$$ac = ad, \text{ y } bc = be$$

luego $ac - bc = ad - be = ab + ed$

ó $ac - bc > ab$ lo que es imposible (35)

147. (Cor.) Dos círculos que se tocan tienen comun la tangente, trazada por el punto de contacto.

148. Mas de dos puntos comunes no pueden tener dos circunferencias que se cortan.

Dem. Si tuviesen mas de 2 puntos comunes, deberian coincidir las circunferencias la una con la otra.

149. Si dos círculos totalmente interiores uno á otro, la línea central será menor que la diferencia de los dos radios. Designando *línea central* por C, y *radio* por R ó r será la

Tés. $C < R - r$

Dem. $R - r = om - pn$

$$C = om - pm$$

pero $pm > pn$; luego $om - pm < om - pn$

ó bien $C < R - r$

150. (Recípr.) Si la línea central es menor que la diferencia de los dos radios, los dos círculos serán totalmente interiores uno á otro.

151. Si dos círculos se tocan interiormente, será la línea central igual á la diferencia de los dos radios.

Tés. $C. = R - r$

152. (Recípr.) Si la línea central es igual á la diferencia de los dos radios, los dos círculos se tocarán interiormente.

153. Si dos círculos se cortan, la línea central será menor que la suma de los dos radios, y mayor que la diferencia de ellos.

Tés $C < R + r$, $C > R - r$

1.) ao (R) + ap (r) $>$ op (C); luego $C < R + r$

2.) ao (R)— ap (r) $<$ op (C); luego $C > R - r$

154. (Recípr.) Si la línea central es menor que la suma de los dos radios, y mayor que la diferencia de ellos, los dos círculos se cortarán.

155. Si dos círculos se tocan exteriormente, será la línea central igual á la suma de los dos radios.

Tés. $C = R + r$

156. (Recípr.) Si la línea central es mayor que la suma de los dos radios, serán totalmente exteriores los dos círculos uno á otro.

CAPITULO TERCERO.

PROPORCIONALIDAD DE LAS LÍNEAS.

A. *En triángulos.*

Esplicaciones.

Llámase *medida comun de dos cantidades extensas de la misma especie*, es decir, que son homogéneas la que está perfectamente contenida en aquellas, y será la *máxima medida comun*, si toda otra medida mayor no está perfectamente contenida en las dos. Queriendo medir dos cantidades extensas de la misma especie, por ej. dos rectas, pueden ocurrir dos casos:

ó I. la menor estará perfectamente contenida en la mayor, de modo que no habrá resto ninguno;

ó II. la menor no estará perfectamente contenida en la mayor, de suerte que quedará un resto.

En el caso II podemos distinguir otros dos casos:

ó 1. habrá al ménos una tercera cantidad que está perfectamente contenida en ambas rectas;

ó 2. no existirá ninguna cantidad de esta cualidad.

En los casos I y II, 1 las dos rectas tienen una medida comun, por lo cual se llaman *conmensurables*; en el caso II, 2 no la tienen, y llámanse *inconmensurables.*

Para hallar la máxima medida comun por ej. entre las dos rectas *ab* y *cd*, determinemos, cuántas veces la menor *cd* esté contenida en la mayor *ab*; sea 3 veces, y el resto *eb*——, despues cuántas veces *eb* en *cd*; sea 2 veces, y el resto *fd*——, luego cuántas veces *fd* en *eb*; sea 1 vez, y el resto *gb*——, por fin cuántas veces *gb* en *fd*; sea 4 veces sin resto. Ahora tendremos *gb*, el último resto, como la máxima medida comun de las dos rectas *ab* y *cd*. La razon es obvia; pues:

$fd = 4\,gb$

$eb = fd\ (= 4\,gb) + gb = 5\,gb$

$cd = 2\,eb\ (= 2.5\,gb) + fd\ (= 4\,gb) = 14\,gb$

$ab = 3\,cd\ (= 3.\,14\,gb) + eb\ (= 5\,gb) = 47\,gb$

luego *gb* estará contenida 47 veces en *ab*, y 14 veces en *cd*.

En el caso II, 2 las dos rectas no tienen medida comun, pero podemos continuar determinando, cuántas veces esté contenido el respectivo resto en el resto anterior, y tendremos en fin un resto tan pequeño, de suerte que podemos suprimirlo. Tomando entónces el último resto, con que hemos operado, sea rs, por medida comun de ambas cantidades tendremos *aproximadamente* la medida comun ó *el límite* de la medida comun de ambas rectas, lo que se expresa: lím. (rs) = medida comun de las dos rectas.

Llámase *razon* en general la comparacion de una cantidad con otra de la misma especie. La comparacion de dos cantidades la que consiste en determinar, cuántas veces esté contenida la una en la otra, llamamos *razon geométrica*, que es nada mas que una division indicada ó un quebrado, por lo cual se escribe la razon, por ej. entre las dos rectas ab y cd, de una de estas dos maneras:

$$ab : cd \quad ó \quad \frac{ab}{cd}$$

El número que indica cuántas veces está cd contenida en ab se llama cociente, de donde se sigue, que dos razones son iguales, si sus cocientes lo son. Siendo por ej. $ab : cd = q$, y $ef : gh = q$, serán iguales las dos razones $ab : cd$ y $ef : gh$.

La igualdad de dos razones geométricas se llama *proporcion geométrica.* Queriendo expresar la proporcion por ej. entre las cuatro líneas ab, cd, mn y rs se la escribe de una de estas dos maneras:

$$ab : cd = mn : rs \quad ó \quad \frac{ab}{cd} = \frac{mn}{rs}$$

y se lee: ab es á cd, como mn es á rs.

Cada proporcion tiene cuatro cantidades ó *términos*, de los cuales el primero y segundo se llaman *primeros*, el tercero y cuarto *últimos*; ademas llámanse el primero y tercero *antecedentes* ú *homólogos*, el segundo y cuarto *consecuentes* ó tambien *homólogos*; por fin se dicen *extremos* el primero y cuarto, *medios* el segundo y tercero. Cuando los términos medios son iguales, la proporcion se llama *contínua*, cuando desiguales, *discreta.* En la proporcion contínua el término medio es la *media proporcional geométrica* Llámase *serie de razones iguales* la igualdad de varias razones de la misma especie, la cual puede escribirse de una de estas dos maneras:

$$ab : cd = ef : gh = il : mn.... \quad ó \quad ab : ef : il = cd : gh : mn....$$

Cuatro cantidades son *directamente proporcionales*, cuando el órden de los términos en la primera corresponde al de los términos de la segunda razon. *Inversamente proporcionales* son las cuatro cantidades de una proporcion, cuando el órden está invertido.

Teoremas sobre las proporciones geométricas.

1) En toda proporcion geométrica el producto de los términos extremos es igual al de los medios.

Hip. $a : b = c : d$. *Tés.* $ad = bc$

Dem. Multiplicando ambos lados por bd tendremos:

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d} \text{ ó bien } ad=bc$$

2) (Cor.) En una proporcion contínua la media proporcional geométrica es igual á la raíz cuadrada del producto de los términos extremos.

Hip. $e:f=f:g$. *Tés.* $f=\sqrt{eg}$
Dem. $eg=f^2$ (1); luego $f=\sqrt{eg}$

3) De dos productos iguales se puede formar una proporcion geométrica.

Hip. $hi=lm$. *Tes.* $h:m=l:i$
Dem. Dividiendo ambos lados por im será:

$$\frac{hi}{im}=\frac{lm}{im} \text{ ó } \frac{h}{m}=\frac{l}{i} \text{ ó } h:m=l:i$$

4) En toda proporcion geométrica pueden cambiarse los términos extremos y medios.

Hip. $o:p=q:r$
Dem. Dividiendo los productos iguales or y pq 1) por pr 2) por qr 3) por op y 4) por oq tendremos:

$$\frac{or}{pr}=\frac{pq}{pr} \text{ ó } o:p=q:r \text{ ó } q:r=o:p$$
$$\frac{or}{qr}=\frac{pq}{qr} \text{ ó } o:q=p:r \text{ ó } p:r=o:q$$
$$\frac{or}{op}=\frac{pq}{op} \text{ ó } r:p=q:o \text{ ó } q:o=r:p$$
$$\frac{or}{oq}=\frac{pq}{oq} \text{ ó } r:q=p:o \text{ ó } p:o=r:q$$

5) En toda proporcion geométrica pueden multiplicarse ó dividirse por el mismo número los términos primeros, los últimos, los antecedentes y los consecuentes:

Hip. $s:t=u:v$.

Tés. 1) $sm:tm=u:v$, $\frac{s}{m}:\frac{t}{m}=u:v$.

2) $s:t=um:vm$, $s:t=\frac{u}{m}:\frac{v}{m}$

3) $sm:t=um:v$, $\frac{s}{m}:t=\frac{u}{m}:v$

4) $s:tm=u:vm$, $s:\frac{t}{m}=u:\frac{v}{m}$

5) $sm:tm=un:vn$, $\frac{s}{m}:\frac{t}{m}=\frac{u}{n}:\frac{v}{n}$

6) $sm:tn=um:vn$, $\frac{s}{m}:\frac{t}{n}=\frac{u}{m}:\frac{v}{n}$

7) $\frac{s}{m} : \frac{t}{m} = un : vn$, $sm : tm = \frac{u}{n} : \frac{v}{n}$

8) $\frac{s}{m} : tn = \frac{u}{m} : vn$, $sm : \frac{t}{n} = um : \frac{v}{n}$

Dem. Las proporciones de la tésis serán verdaderas, cuando el producto de los términos extremos es igual al de los medios. Pero en todos son iguales los productos dichos; luego....

6) En toda proporcion geométrica todos los términos se pueden elevar á la misma potencia.

Hip. $v : x = y : z$. *Tés.* $v^m : x^m = y^m : z^m$

Dem. Elevando $\frac{v}{x}$ é $\frac{y}{z}$, que son iguales, á la potencia m será:

$$\left(\frac{v}{x}\right)^m = \left(\frac{y}{z}\right)^m \text{ ó } \frac{v^m}{x^m} = \frac{y^m}{z^m}$$

luego $v^m : x^m = y^m : z^m$

7) En toda proporcion geométrica de todos los términos puede extraerse la misma raíz.

Hip. $a : b = c : d$. *Tés.* $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$

Dem. Véase el teor. antecedente.

8) En toda proporcion geométrica la suma ó diferencia de los primeros términos es á la suma ó diferencia de los últimos, como el primer antecedente ó consecuente es al segundo antecedente ó consecuente.

Hip. $e : f = g : h$. *Tés.* $(e \pm f) : (g \pm h) = e : g = f : h$

Dem. Siendo $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ será tambien

$$\frac{e}{f} \pm 1 = \frac{g}{h} \pm 1 \text{ ó } \frac{e \pm f}{f} = \frac{g \pm h}{h}$$

luego cambiando los términos medios tendremos:

$(e \pm f) : (g \pm h) = f : h = e : g$

9) (Cor.) En toda proporcion geométrica la suma de los primeros términos es á la de los últimos, como la diferencia de los primeros es á la de los últimos.

Hip. $l : m = n : o$. *Tés.* $(l + m) : (n + o) = (l - m) : (n - o)$.

Dem. Véase el teor. antecedente.

10) (Cor.) En toda proporcion geométrica la suma de los primeros términos es á su diferencia, como la suma de los últimos es á su diferencia.

Hip. $p : q = r : s$. *Tés.* $(p + q) : (p - q) = (r + s) : (r - s)$

Dem. Véase el teor. 8.

11) En toda proporcion geométrica la suma ó diferencia de los

términos antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como el primer término es al segundo, ó como el tercero es al cuarto.

Hip. $u : v = x : y$

Tés. $(u \pm x) : (v \pm y) = u : v = x : y$

Dem. Véase el teor. 8.

12) (Cor.) En toda proporcion geométrica la suma de los términos antecedentes es á la de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes.

Hip. $a : b = c : d$

Tés. $(a + c) : (b + d) = (a—c) : (b—d)$

13) (Cor.) En toda proporcion geométrica la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia:

Hip. $e : f = g : h$

Tés. $(e + g) : (e—g) = (f + h) : (f—h)$

14) En una serie de razones geométricas que son iguales, la suma de los términos antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Hip. $l : m = o : p = q : r = s : t.$

Tés. $(l + o + q + s) : (m + p + r + t) = l : m.$

Dem. Siendo c el cociente de las razones iguales serán:

$$\frac{l}{m} = c, \frac{o}{p} = c, \frac{q}{r} = c, \frac{s}{t} = c$$

luego $l = mc$, $o = pc$, $q = rc$, $s = tc$.

Sumando todas estas igualdades (ecuaciones) tendremos:

$$l + o + q + s = (m + p + r + t)\, c$$

luego $\dfrac{l + o + q + s}{m + p + r + t} = c = \dfrac{l}{m}$, luego....

15) De una serie de proporciones geométricas podemos formar una nueva proporcion multiplicando entre sí los términos que tienen un mismo lugar.

Hip. $a : b = c : d$

$e : f = g : h$

$l : m = o : p$

Tés. $ael : bfm = cgo : dhp.$

Dem. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f} = \dfrac{g}{h}, \dfrac{l}{m} = \dfrac{o}{p}$

Multiplicando estas ecuaciones entre sí será:

$\dfrac{ael}{bfm} = \dfrac{cgo}{dhp}$ de donde se sigue que

$ael : bfm = cgo : dhp$

16) Siendo en una proporcion geométrica iguales los términos antecedentes (resp. consecuentes), lo serán tambien los conse-

cuentes (resp. antecedentes).

Hip. $p : q = p : s$. *Tés.* $q = s$

Dem. $ps = pq$

Dividiendo ambos lados por p tendremos $q = s$

17) Si en una proporcion geométrica tres términos son iguales á tres de otra, y los términos respectivos tienen en ambas la misma posicion; serán tambien iguales los cuartos.

Hip. $t : u = v : z$, $t : u = v : y$

Tés. $z = y$

Dem. Por ser iguales en ambas proporciones las primeras razones, lo serán tambien las segundas; luego:
$v : z = v : y$, y por consiguiente $z = y$ (16.)

Explicaciones.

Si una recta está dividida y prolongada de tal manera que la mayor y la menor parte estén en la misma relacion, como la recta con la prolongacion y la prolongacion sola, se llama *dividida armónicamente.* Si se traza una línea paralela á un lado de un triángulo que corta los otros dos lados de él, las dos partes de los lados cortados que están entre el vértice y la paralela, se llaman *partes superiores*, las otras dos, *partes inferiores*, y los lados divididos llamamos *todos.* Las *figuras rectilíneas son semejantes*, si tienen los ángulos respectivamente iguales y colocados en el mismo órden, y si tienen los lados proporcionales y tambien colocados en el mismo órden. Los ángulos iguales y los lados proporcionales de las figuras semejantes se llaman *ángulos y lados homólogos.* Proyeccion de una recta limitada sobre otra recta ilimitada ó á lo ménos bastante prolongada es parte de la segunda, comprendida entre las perpendiculares bajadas desde los límites de la primera á la segunda. Si las dos rectas forman un ángulo, la proyeccion es la parte de la segunda, comprendida entre el vértice y la perpendicular bajada desde el límite de la primera á la segunda.

Teoremas.

157. Si una recta es paralela á un lado de un triángulo, dividirá los otros dos en partes proporcionales.

Hip. $hi \ddagger bc$. *Tés.* $ah : hb = ai : ic$

Dem. Hay dos casos: ah y hb pueden ser 1) conmensurables 2) inconmensurables.

Caso 1. Siendo ah y hb conmensurables supongamos que m * sea

* Para simplificar las proporciones siguientes designamos las medidas de las líneas por una sola letra.

la medida comun entre ellos, y que esté contenida en ah p veces y en hb q veces. Trazando por los puntos de division paralelas á bc estará ai tambien dividida en p partes iguales, é ic en q partes iguales; cada parte llamemos n. De lo dicho se infiere que:

$$ah = pm \text{ y } hb = qm$$
$$ai = pn \text{ é } ic = qn$$

luego $ah : hb = pm : qm$

y $ai : ic = pn : qn$

por esto $ah : hb = ai : ic$

Caso 2. ah y hb sean inconmensurables. Estando ah dividida en partes iguales mas pequeñas que hb, y poniendo la medida de ah sobre hb, caerá ciertamente un punto de division entre h y b, por ej. en r; trazando $rs \ddagger bc$ será:

$ah : hr = ai : is$ (caso 1.)

Tomando la medida de ah sucesivamente mas pequeña podemos hacer que r y por consiguiente tambien s se aproximen mas y mas á b resp. á c, por lo cual el límite de $(ah : hr)$ será $ah : hb$, y el límite de $(ai : is)$ será $ai : ic$; de donde se sigue que $ah : hb = ai : ic$

158. La recta paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos, de modo que las partes superiores son proporcionales á los todos.

Tés. $ah : ab = ai : ac$

Dem. $ah : hb = ai : ic$

luego tambien $ah : (ah + hb) = ai : (ai + ic)$

ó bien $ah : ab = ai : ac$

159. Toda recta paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos, de suerte que las partes inferiores y los todos son proporcionales.

Tés. $hb : ab = ic : ac$

Dem. Véase el teor. 158.

160. Una recta que es paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos, de manera que una parte superior es á su todo, como la paralela es al lado tercero.

Tés. $ah : ab = hi : bc$

Dem: Trazando $hm \ddagger ac$ tendremos:

$ah : ab = cm : cb$ (159)

pero $mc = hi$

luego $ah : ab = hi : bc$

161. (Recípr.) Si una recta divide los lados de un triángulo, de manera que sean proporcionales:

las partes superiores é inferiores

las partes superiores y los todos

las partes inferiores y los todos
y que una parte superior sea á su todo, como la recta es al tercer lado, será la recta paralela á este.

Dem. Suponiendo que no hi sino hm sea paralela á bc tendríamos:

1) $ah : hb = am : mc$, tambien tenemos:
$ah : hb = ai : ic$ (hip. 1)
luego $am : ai = mc : ic$, lo que es imposible, porque la primera razon es creciendo, y la segunda decreciendo.

2) Segun la suposicion es
$ah : ab = am : ac$, ademas
$ah : ab = ai : ac$ (hip. 2)
por esto $am : ai = ac : ac$, lo que es tambien absurdo.

etc.

162. Trazando en un triángulo paralelas á un lado, estarán en proporcion las partes respectivas de los otros dos....

Hip. fg, hi y $rs \pm bc$
Tés. por ej. $fh : rb = gi : sc$
Dem. $ah : ai = fh : gi$
tambien $ah : ai = ab : ac$
luego $fh : gi = ab : ac$
ademas $ab : ac = rb : sc$
por esto $fh : gi = rb : sc$
ó $fh : rb = gi : sc$

163. Si tres ó mas rectas que se encuentran en un punto cortan á dos paralelas, serán proporcionales las partes de la una y las de la otra de las dos paralelas.

Dem. $fh : bm \; (= ah : am) = hi : mn \; (= ai : an) = il : no \; (= al : ao) = lg : oc$
quitando las razones dentro de los paréntesis tendremos:
$fh : bm = hi : mn = il : no = lg : oc$.

164. (Cor.) Tres ó mas rectas se encontrarán en un mismo punto, si cortan á dos paralelas, de modo que las partes de la una y las de la otra sean proporcionales.
Suponiendo que fb y hm se corten en a pasará tambien in por a. Para demostrarlo, juntemos a con n, y llamemos el punto, donde se encuentran an y la prolongacion de fh, x. Entónces
$fh : hx = bm : mn$ (163).
tambien $fh : hi = bm : mn$ (hip.)
luego $hx = hi$, ó en otras palabras: el punto x es el punto i, an pasará por i, ó in pasará por a.
De la misma manera puede demostrarse que lo y gc pasarán por a.

165. Si en un triángulo se traza una paralela á un lado, el triángulo parcial que resulta será semejante al total.

Tés. $\triangle\ afg \sim abc$
Dem. $\sphericalangle\ bac = bac,\ afg = abc,\ agf = acb$
ademas $af : ag = ab : ac$ (158)
y $af : fg = ab : bc$ (160)
luego escribiendo los términos af y ab una sola vez será $af : ag : fg = ab : ac : bc$

166. Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos respectivamente iguales (1. teor. de la semejanza).
Hip. $\sphericalangle\ abc = opq,\ \sphericalangle\ acb = oqp$
Tés. $\triangle\ abc \sim opq$
Dem. Haciendo $af = op$ trazemos $fg \ddagger bc$, y será:
$\triangle\ abc \sim afg$ (165). Pero $\triangle\ afg \cong opq$; luego $\triangle\ abc \sim opq$.

167. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son semejantes, si tienen respectivamente iguales uno de los ángulos agudos.

168. (Cor.) Dos triángulos isósceles son semejantes, si tienen respectivamente iguales un ángulo.

169. (Cor.) Los triángulos equiláteros siempre son semejantes.

170. Dos triángulos son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales dos lados, é igual el ángulo comprendido. (2 teor. de la semejanza).
Hip. $ab : ac = op : oq,\ \sphericalangle\ bac = poq$.
Tés. $\triangle\ abc \sim opq$.
Dem. Haciendo $af = op$ trazemos $fg \ddagger bc$, y será $\triangle\ afg \sim abc$.
Ademas tenemos:
$ab : ac = af : ag$
y $ab : ac = op : oq$ (hip.)
luego por ser $af = op$ (contr.) tambien $ag = oq$
" $\triangle\ afg \cong opq$, y por esto $\triangle\ abc \sim opq$.

171. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales los dos catetos.

172. Dos triángulos son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales los tres lados. (3. teor. de la semejanza).
Dem. Haciendo $af = op$ trazemos $fg \ddagger bc$, y será:
$\triangle\ afg \sim abc$; ademas tenemos:
$ab : ac = af : ag$
y $ab : ac = op : oq$ (hip.)
luego por ser $af = op$ (contr.) tambien $ag = oq$
Tambien tenemos:
$ab : bc = af : fg$
y $ab : bc = op : pq$
luego por ser $af = op$ tambien $fg = pq$
por esto $\triangle\ afg \cong opq$, y $\triangle\ abc \sim opq$.

173. (Cor.) Dos triángulos isósceles son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales la base y uno de los dos lados

iguales.

174. Dos triángulos son semejantes, si tienen respectivamente dos lados proporcionales, é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos. (4. teor. de la semejanza).

Hip. $ab : ac = op : oq$; $\sphericalangle\ acb = oqp$

Dem. Haciendo $af = op$ trazemos $fg \ddagger ab$, y será $\triangle\ afg \sim abc$ ademas tenemos:

$ab : ac = af : ag$

y $ab : ac = op : oq$ (hip.)

luego $ag = oq$

" $\triangle\ afg \cong opq$, (51) y por esto...

175. (Cor.) Dos triángulos rectángulos son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales la hipotenusa y un cateto.

176. La bisectriz de un ángulo en un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados.

Hip. $\sphericalangle\ bad = cad$. *Tés.* $ab : ac = bd : dc$.

Dem. Trazando $bm \ddagger ac$ y prolongando ad hasta que corte á bm en n, tendremos:

$\triangle\ acd \sim bnd$ (166), y por tanto

$ac : dc = bn : bd$

ademas $\sphericalangle\ bnd = cad = bad$, por lo cual $bn = ab$

luego $ac : dc = ab : bd$

ó $ab : ac = bd : dc$

177. (Recípr.) Si una recta, trazada desde el vértice de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados, la recta será bisectriz.

Hip. $ab : ac = bd : dc$. *Tés.* $\sphericalangle\ bad = cad$

Dem. Trazando $bm \ddagger ac$, y prolongando ad, hasta que corte á bm en n, será:

$\triangle\ acd \sim bnd$ y por tanto

$ac : dc = bn : bd$

tambien $ac : dc = ab : bd$ (hip.)

luego $bn = ab$, por esto $\sphericalangle\ bad = bnd = cad$

178. Si una bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo corta la prolongacion del lado opuesto; el mayor de los dos demas lados será al menor, como el lado prolongado con la prolongacion á la prolongacion sola.

Hip. $\sphericalangle\ baf = daf$. *Tés.* $ac : ab = cf : bf$

Dem. Trazando $df \ddagger ab$ será:

$df : dc = ab : ac$

ademas $\sphericalangle\ daf = baf = afd$, por consiguiente $df = ad$

luego $ad : dc = ab = ac$

pero $ad : cd = bf : cf$

por esto $ac : ab = cf : bf$

179. (Recípr.) Si se prolonga un lado de un triángulo, de modo que el lado con la prolongacion sea á la prolongacion sola, como el mayor de los dos otros lados es al menor; la línea que une el punto final de la prolongacion con el vértice opuesto del triángulo será bisectriz del ángulo exterior.

Hip. $ac : ab = cf : fb$. *Tés* $\sphericalangle baf = daf$

Dem. Trazando $df \ddagger ab$ tendremos:

$ac : ab = cf : fb$ (hip.)

pero $cd : ad = cf : fb$

luego $ac : ab = cd : ad$

Tambien $ac : ab = cd : fd$

luego $ad = fd$, y $\sphericalangle daf = dfa = baf$

180. (Cor.) Trazando una bisectriz de un ángulo interior y exterior de un triángulo, quedará dividido el lado opuesto armónicamente por ambas bisectrices.

Hip. af y ag bisectrices

Tés. $cf : bf = cg : bg$

Dem. Segun el teor. 176 tenemos $ac : ab = cf : bf$

„ „ „ 178 „ $ac : ab = cg : bg$

luego $cf : bf = cg : bg$

181. Dos lados de un triángulo y sus alturas son inversamente proporcionales.

Hip. $ag \perp bc$, $bh \perp ac$. *Tés.* $ac : bc = ag : bh$

Dem. $\triangle$ agc y bhc son semejantes.

luego $ag : ac = bh : bc$ ó $ac : bc = ag : bh$

182. Si en un triángulo rectángulo se baja la altura sobre la hipotenusa, será la altura la media proporcional entre las partes de la hipotenusa, y cada cateto la media proporcional entre toda la hipotenusa y su parte adyacente.

Tés. 1) $bd : ad = ad : cd$

2) $bd : ab = ab : bc$

$cd : ac = ac : bc$

Dem. $\sphericalangle abd + bad = R$, y $\sphericalangle cad + bad = R$, luego $abd = cad$

por esto $\triangle$ $abd \sim acd \sim abc$

luego $bd : ad = ad : cd$ (Tés. 1.)

y $bd : ab = ab : bc$, y $cd : ac = ac : bc$ (Tés. 2.)

B. *En cuadriláteros.*

183. El cuadrilátero que se forma, uniendo los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero, es un paralelógramo.

Dem. Trazando ac tenemos:

$ab : ad = am : ap$

y $cb : cd = cn : co$
luego $mp \ddagger no$
Por la misma razon trazando bd tendremos $mn \ddagger op$, por lo cual $mnop$ es paralelógramo.

184. Trazando en un trapecio una paralela á los lados paralelos, las partes de los lados no paralelos serán proporcionales.

Tés. $am : md = bn : nc$

Dem. Prolongando ad y bc, hasta que se corten en o será:

$om : am = on : bn$
y $om : md = on : nc$
por tanto $am : md = bn : nc$

185. Trazando desde un vértice de un cuadrilátero una diagonal, y desde un punto de un lado que es adyacente á aquel vértice, una paralela al lado siguiente, y desde el punto donde se encuentran la diagonal y la paralela, otra paralela al lado siguiente; el nuevo cuadrilátero será semejante al grande.

Hip. $ef \ddagger dc$, $fg \ddagger cb$

Tés. $agfe \sim abcd$

Dem. En 1. lugar todos los $\sphericalangle$ del uno de los cuadriláteros son = á todos los del otro, y al mismo tiempo colocados en el mismo órden. Ademas tenemos:

$ag : ab = gf : bc$
y $ef : dc = ea : da$
luego tambien los lados de ambos cuadriláteros están...

186. Dos cuadriláteros son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales dos lados consecutivos, é iguales los ángulos comprendidos y adyacentes á aquellos lados. (1. teor. de la semejanza).

Dem. Trazando una diagonal tendremos 2 pares de triángulos semejantes, por consiguiente....

187. Dos cuadriláteros son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales tres lados, é iguales los ángulos comprendidos. (2 teor. de la semejanza).

188. (Cor.) Dos trapecios son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales dos lados consecutivos, é igual el ángulo comprendido y el otro ángulo adyacente al lado paralelo.

189. (Cor.) Dos paralelógramos son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales dos lados consecutivos, é igual el ángulo comprendido.

190. (Cor.) Dos rombos son semejantes, si tienen un ángulo igual.

191. (Cor.) Dos rectángulos son semejantes, si tienen proporcionales dos lados consecutivos.

192. (Cor.) Los cuadrados siempre son semejantes.

C. *En polígonos.*

193. Trazando desde un vértice de un polígono todas las diagonales, y desde un punto de un lado que toca á aquel vórtice una paralela al lado siguiente; desde el punto, donde se encuentran la paralela y la primera diagonal, otra paralela al lado siguiente etc etc; el nuevo polígono será semejante al grande.

194. Dos polígonos de n lados son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales n—2 lados consecutivos, é iguales los ángulos comprendidos y los adyacentes á aquellos lados. (1. teor. de la semejanza).

195. Dos polígonos de n lados son semejantes, si tienen respectivamente proporcionales n—1 lados, é iguales los ángulos comprendidos. (2. teor. de la semejanza).

196. (Cor.) Los polígonos regulares que tienen igual número de lados, siempre son semejantes.

197. Los polígonos semejantes pueden descomponerse en triángulos semejantes, tirando las diagonales desde un vértice homólogo.

Dem. Por ser $\triangle\ abc \sim fgh$ se sigue que $bc : ac = gh : fh$; pero $bc : cd = gh : hi$ (hip.), luego $ac : cd = fh : hi$. Ademas $\sphericalangle\ bcd—bca\ (= acd) = \sphericalangle\ ghi — ghf\ (= fhi)$, y por tanto

198. (Recípr.) Dos polígonos, divididos por diagonales homólogas en triángulos semejantes, son tambien semejantes.

199. Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí, como dos lados ó dos diagonales homólogas.

Dem. 1) Siendo ab, bc, cd, de y ea los lados del uno, fg, gh, hi, il y lf los lados homólogos del otro polígono tendremos:
$ab : fg = bc : gh = cd : hi = de : il = ea : lf$ ó
$(ab + bc + cd + de + ea) : (fg + gh + hi + il + lf) = ab : fg$
2) Por ser $\triangle\ abc \sim fgh$ será $ab : fg = ac : fh$, por lo cual arriba en la última proporcion en vez de $ab : fg$ podemos poner $ac : fh$, lo que necesitamos para la demostracion de la tésis 2.

200. (Cor.) Los perímetros de dos polígonos regulares de igual número de lados son entre sí, como los lados, ó las diagonales homólogas, ó como los radios de círculos inscritos ó circunscritos.

Tés. $(ab + bc + cd + de + ea) : (fg + gh + hi + il + lf) = 1)\ ab : fg = 2)\ ac : fh = 3)\ or : ps = 4)\ ob : pg.$

Dem. Las 2 primeras tésis se deducen fácilmente del teor. anterior.

Para demostrar la 3. y 4. tracemos ob, oc, pg ph, y las $\perp$ or y ps. Siendo or y ps los radios de los círculos inscritos, bo y pg

los de los circunscritos, será $\triangle\ obr \sim pgs$, de donde se sigu
$bc : gh = or : ps$; luego $5.\ bc : 5.\ gh = or : ps$
ó $(ab + bc....) : (fg + gh....) = or : ps$ (tesis 3.)
Tambien será $\triangle\ obc \sim pgh$, y por tanto:
$bc : gh = ob : pg$; luego $5.\ bc : 5.\ gh = ob : pg$
ó $(ab + bc....) : (fg + gh....) = ob : pg$ (tesis 4).

D. *En círculos.*

201. Dos circunferencias son proporcionales á sus radios.

Dem. Designando por C y c las dos circunferencias, por R y r los 2 radios, y por P y p los perímetros de 2 polígonos regulares del mismo número de lados inscritos, el primero en C, y el otro en c, tendremos las proporciones:
$P : p = R : r$ ó $P : R = p : r$ (200)
las cuales siempre serán verdaderas, aunque duplicásemos mas y mas el número de los lados em ambos polígonos.
Ademas, por ser lim. P (resp. p) $= C$ (resp. c), será tambien:
lim. $(P : R) = C : R$, y lim. $(p : r) = c : r$
luego $C : R = c : r$
ó $C : c = R : r$

202. Los arcos de dos círculos iguales ó de un mismo círculo son proporcionales á sus ángulos centrales.

Dem. Pueden ocurrir 2 casos: Los arc. ab y cd pueden ser conmensurables é inconmensurables.
Caso 1. Siendo los arc. ab y cd conmensurables supongamos que sea arc. m la medida comun entre ellos, y arc. $ab = p$ (3) m, y arc. $cd = q$ (5) m; luego tendremos:
arc. $ab : cd = p : q$
Ahora uniendo los 2 centros con los puntos de division en los 2 arcos ab y cd serán todos los $\sphericalangle$ parciales iguales entre sí (119) y por esto:
$$\sphericalangle\ aob = p.\ aoc \quad \text{y} \quad \sphericalangle\ cpd = q.\ cpg$$
luego $\sphericalangle\ aob : cpd = p : q$
Comparando esta proporcion con la primera de arriba será:
$$\text{arc. } ab : cd = p : q$$
y $\sphericalangle\ aob : cpd = p : q$
luego arc. $ab : cd = \sphericalangle\ aob : cpd$
Caso 2. Siendo los arc. ab y cd inconmensurables, y arc. $ab <$ arc. cd, pongamos m, la medida del arc. ab, sobre el arc. cd; por ser inconmensurables los arc., no puede coincidir el último punto de division, por ej. r, con d; trazando pr tendremos:
arc. $ab : cr = \sphericalangle\ aob : cpr$ (caso 1.)
Tomando ahora la medida del arc. ab sucesivamente mas y

mas pequeña podemos hacer que el punto r se aproxime mas y mas al punto d, por lo que lim. cr será cd, ó bien

lim. (arc. ab : cr) $=$ arc. ab : cd

tambien $\sphericalangle\ cpr$ se aproximará mas y mas al $\sphericalangle\ cpd$, de modo que lim. ($\sphericalangle\ cpr$) será $\sphericalangle\ cpd$, ó bien

lim. ($\sphericalangle\ aob : cpr$) $= \sphericalangle\ aob : cpd$

Comparando esta proporcion con las primeras de este caso será:

arc. $ab : cr = \sphericalangle\ aob : cpr$ (caso 1)

y lim. ($\sphericalangle\ aob : cpr$) $= \sphericalangle\ aob : cpd$

luego arc. $ab : cr$ $= \sphericalangle\ aob : cpd$

pero lim. (arc. ab : cr) $=$ arc. $ab : cd$

luego arc. $ab : cd = \sphericalangle\ aob : cpd$

203. (Cor.) Un arco es á su circunferencia, como el respectivo ángulo central es á 4 R.

204. Dos arcos que tienen ángulos centrales iguales, son proporcionales á los radios.

Hip. $\sphericalangle\ aob = cpd$. *Tés.* arc. $ab : cd = oa : pc$

Dem. arc. $ab : C = \sphericalangle\ aob : 4$ R

arc. $cd : c = \sphericalangle\ cpd : 4$ R

por esto arc. $ab : C =$ arc. $cd : c$

luego arc. ab : arc. $cd = C : c = oa : pc$ (201.)

205. Bajando desde un punto de la circunferencia una perpendicular al diámetro; la perpendicular será la media proporcional geométrica entre las dos partes de este.

Dem. Véase el teor. 182

206. Trazando por un punto extremo de la cuerda un diámetro, y trazando desde el otro punto extremo una perpendicular á este; la cuerda será la media proporcional geométrica entre el diámetro y su parte adyacente á la cuerda.

Dem. Véase el teor. 182

207. Si dos cuerdas se cortan, sus partes son inversamente proporcionales.

Tés. $ag : dg = cg : bg$

Dem. Trazando ac y bd será:

$\sphericalangle\ acg = dbg$ y $\sphericalangle\ cag = bdg$

luego $\triangle\ acg \sim bdg$.

por esto $ag : cg = dg : bg$

ó $ag : dg = cg : bg$

208. (Recípr.) Si las partes de dos rectas que se cortan son inversamente proporcionales, puede trazarse por los puntos extremos de las rectas una circunferencia.

Dem. Uniendo a con c, y b con d tendremos:

$\triangle\ acg \sim bdg$; luego $\sphericalangle\ acg = dbg$, y por consiguiente... (131.)

209. Dos secantes que se cortan en un punto fuera del círculo, son inversamente proporcionales á sus partes externas.

Tés. $ao : bo = do : co$

Dem. Trazando ad y bc será $\sphericalangle\, dao = cbo$; luego $\triangle\, dao \sim cbo$, por lo cual $ao : do = bo : co$ etc.

210. (Recípr.) Si los lados de un ángulo son divididos de tal manera que los todos sean inversamente proporcionales á las partes adyacentes al vértice; se puede trazar una ciruunferencia por los puntos extremos y los de division.

Dem. Véase el teor. 208.

211. Si se trazan desde un punto una secante y una tangente á la circunferencia, será la tangente la media proporcional geométrica entre la secante y su parte externa.

Tés. $ab : ac = ac : ad$

Dem. Trazando bc y cd tendremos:

$$\sphericalangle\, cbd = acd \text{ (132) y } \sphericalangle\, cab = cad$$

luego $\triangle\, abc \sim acd$, y por esto $ab : ac = ac : ad$.

212. Trazando una tangente igual al diámetro del círculo, y desde el punto extremo de la tangente una secante que pasa por el centro; será la parte interior de la secante la media proporcional geométrica entre la secante entera y su parte externa (sectio aurea)

Hip. $cd = ab$. *Tés.* $ad : ab = ab : bd$

Dem. $ad : cd = cd : bd$ (211), pero $cd = ab$; luego...

213. (Cor.) Uniendo el punto extremo de la secante que está dividida segun la "sectio aurea," con el punto de contacto de la tangente, y trazando por el punto, donde corta la secante á la circunferencia, una paralela á la recta de union; estará la tangente tambien dividida segun la "sectio aurea"

Tés. $cd : ce = ce : ed$

214. El lado de un polígono regular inscrito de 10 lados es igual á la parte mayor del radio que está dividido segun la "sectio aurea."

Dem. Siendo ab el lado del polígono arriba dicho trazemos los radios ao y bo, y dividamos $\sphericalangle\, abo$ por bc en partes iguales; entónces será:

$$\sphericalangle\, aob = 36° \text{ [grados] luego } \sphericalangle\, abc = bao = 72°$$

ademas $\sphericalangle\, abc = 36°$, por ser la mitad de abo

luego $\triangle\, abo \sim abc$

" $ao : ab = ab : ac$

" $ao : co = co : ac$

enfin $\sphericalangle\, (b) = 36°$, por ser la mitad de abo, luego $bc = co$

y $\sphericalangle\, acb = 72°$ [12], luego $bc = ab$

por esto $ab = co$; poniendo en la primera proporcion co en lu-

gar de ab tendremos:
$ao : co = co : ac$
por consiguiente el radio ao está dividido en c segun la "sectio aurea," y la mayor parte $co =$ al lado del polígono regular de 10 lados.

CAPITULO CUARTO.

IGUALDAD Y DESIGUALDAD DE LAS SUPERFICIES.

Explicaciones.

Se llaman *superficies iguales* las que tienen igual magnitud, aunque tengan distinta forma. Son *semejantes las superficies,* que tienen la misma forma, pero no la misma magnitud. Las *superficies congruentes* tienen la misma magnitud y la misma forma. Si se traza por un punto cualquiera de la diagonal de un paralelógramo paralelas á los lados, los dos nuevos paralelógramos que no están cortados por la diagonal, se llaman *paralelógramos complementerias.* Llámase *corona ó anillo* la superficie comprendida entre dos circunferencias de círculos concéntricos. Determinándose un rectángulo por dos lados consecutivos, y un cuadrado por un solo lado, se puede representar el rectángulo, cuyos dos lados consecutivos son ab y cd, por la fórmula $ab \times cd$, y el cuadrado sobre ab por la fórmula $ab \times ab$ ó ab^2

Teoremas.

215. Dos paralelógramos son iguales, si tienen respectivamente iguales la base y altura.

Dem. Colocando los 2 paralelógramos el uno sobre el otro, de modo que coincidan 2 bases, se sigue que las otras 2 bases estarán en línea recta, porque de otra manera no tendrian la altura igual. Asi colocados los paralelógramos será $\triangle\, dag \cong cbf$. Restando estos $\triangle$ alternando del trapecio $abfd$ tendremos $abcd = abfg$.

216. Un triángulo es la mitad de un paralelógramo, si ambos tienen igual base y altura.

Hip. $ab = de$, $cm = fn$. *Tés.* $\triangle\, abc = \frac{1}{2}\, defg$

Dem. Trazando $co = y \ddagger ab$, y juntando o con b tendremos:
$\triangle\, abc = \frac{1}{2}\, aboc$ (72) $= \frac{1}{2}\, defg$ (215)

217. (Cor.) Dos triángulos son iguales, si tienen igual base y altura.

218 En un paralelógramo son iguales los paralelógramos comple-

mentarios.

Tés. $bcog = dfoh$

Dem. $\triangle abc \cong adc$ (^{1}), $\triangle aeo \cong aho$ (^{2}), $\triangle cgo \cong cfo$ (^{3}). Restando (^{2}) y (^{3}) de (^{1}) tendremos $bcog = dfoh$.

219. El rectángulo, formado por dos rectas que son términos extremos de una proporcion, es igual al rectángulo, formado por otras dos rectas siendo términos medios de la misma.

Hip. $mn : op = qr : st$.

Dem. Formando un R, cuyos lados sean ab ($= op$) y bc ($= st$), tomemos ad ($= mn$), y traccemos dc ($= qr$) $\ddagger$ bc. Tirando la recta ae y prolon ándola, ha de pasar por c, porque si pasase por ej. por x, tendríamos:

$ad : ab = dc : bx$

pero $ad : ab = dc : bc$ (constr.)

luego $bc = bx$, lo que es absurdo.

Completando ahora el Rctg. $abcf$, y trazando gh $\ddagger$ ab, y ci $\ddagger$ ch tendremos:

Rctg. $bdeh = geif$

luego Rctg. $bdeh + adeg = geif + adeg$

ó ,, $abhg = adif$

de los cuales el primero está formado de op y qr, y el segundo de mn y st.

220. (Cor.) Formando cuatro rectas una proporcion contínua, será el cuadrado sobre la media proporcional igual al rectángulo, formado por los términos extremos.

221. (Cor.) Si dos cuerdas de un círculo se cortan, el rectángulo, formado de las partes de la una, será igual al formado de las de la otra.

222. (Cor.) Si dos secantes de un círculo se cortan, serán iguales los dos rectángulos, formados por las secantes enteras y sus respectivas partes.

223. (Cor.) El cuadrado de una tangente es igual al rectángulo, formado por una secante que parte del mismo punto, y su parte externa.

224. (Cor.) Bajando en un triángulo rectángulo desde el vértice del ángulo recto una perpendicular á la hipotenusa; el cuadrado sobre esta será igual al rectángulo, formado por las partes de la hipotenusa.

225. (Cor.) Bajando en un triángulo rectángulo desde el vértice del ángulo recto una perpendicular á la hipotenusa; el cuadrado sobre cada uno do los catetos será igual al rectángulo, formado por la hipotenusa entera y la parte adyacente al respectivo cateto.

226. Dos rectángulos son iguales, si sus bases son inversamente

proporcionales á sus alturas.

227. Dos paralelógramos son iguales, si sus bases son inversamente proporcionales á sus alturas.

228. Dos triángulos son iguales, si sus bases son inversamente proporcionales á sus alturas.

229. Dos paralelógramos son iguales, si tienen un ángulo igual, y si los lados del ángulo en el uno son inversamente proporcionales á los lados del ángulo en el otro.

230. Dos triángulos son iguales, si tienen un ángulo igual, y si los lados del ángulo en el uno son inversamente proporcionales á los lados del ángulo en el otro.

231. El cuadrado sobre la suma de dos rectas es igual á la suma de los cuadrados sobre las mismas, mas el duplo del rectángulo, formado de estas.

Hip. $ab = ac + cb$. *Tés.* $ab^2 = ac^2 + cb^2 + 2\ ac \times cb$

Dem. Formando el $\square$ *abde* sobre la suma *ab* tenemos:

$af = ac$, y luego tambien $fe = cb$, y trazando

$ch \ddagger ae$, y $fg \ddagger ab$ será:

$\square\, acof = ac^2$, y $\square\, ogdh = (og^2) = cb^2$

tambien Rctg. $fohe = (fo \times fe) = ac \times cb$

y Rctg. $cbgo = (co \times cb) = ac \times cb$

Por ser $\square\, abdc = acof + ogdh +$ Rctg. $fohe + cbgo$

y Rctg. $fohe = cbgo$

tendremos $\square\, abde$ ó $(ac + cb)^2 = ac^2 + cb^2 + 2\ ac \times cb$

232. (Cor.) El cuadrado sobre una recta es igual al cuádruplo de la mitad de esta.

233. El cuadrado sobre la diferencia de dos rectas es igual á la suma de los cuadrados sobre las mismas, ménos el duplo del rectángulo, formado de estas.

Hip. $ac = ab - bc$. *Tés.* $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2\ ab \times bc$

Dem. Formando el $\square$ *abde* sobre *ab* tenemos:

$af = ac$, y luego tambien $fe = bc$, y trazando

$ch \ddagger ae$, y $fg \ddagger ab$ tendremos:

$\square\, acof = ac^2$, y $\square\, ogdh = (og^2) = bc^2$

tambien Rctg. $fgde = (fg \times fe) = ab \times bc$

y Rctg. $cbdh = (bd \times bc) = ab \times bc$

Restando ahora de $\square$ *abde* los 2 Rctg. iguales *fgde* y *cbdh*, y sumando el $\square$ *ogdh* por haber restado demasiado tendremos:

$\square\, acof$ ó $(ab - bc)^2 = ab^2 + bc^2 - 2ab \times bc$

234. En todo ángulo con lados limitados son iguales los rectángulos, formados por un lado y la proyeccion del otro lado sobre él.

Hip. *bd* la proyeccion de *bc* á *ab*

be „ „ „ *ab* á *bc*

$bg = ba$, $bi = bc$

Tés. Rctg. $bdfg = bchi$

Dem. Trazando cg y ai será:

$\triangle cbg \cong abi$ (43).

pero $\triangle cbg = \frac{1}{2}$ Rctg. $bdfg$, y $\triangle abi = \frac{1}{2}$ Rctg. $bchi$

luego Rctg. $bdfg = bchi$.

235. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos. (Pitágoras, 555 ántes de J. C.)

Hip. $\sphericalangle abc = R$. *Tés.* $ac^2 = ab^2 + bc^2$

Dem. Trazando $bm \perp ac$ y prolongándola, hasta que corte de en n, será:

am la proyeccion de ab á ac

cm „ „ „ bc „ ac

ab „ „ „ ac „ ab

bc „ „ „ ac u bc

luego mirando $\sphericalangle abc$, y aplicando el teor. anterior sera:

$ab^2 =$ Rctg. $amnd$

y mirando $\sphericalangle acb$, y aplicando el mismo teor. será:

$bc^2 =$ Rctg. $cmne$

pero Rctg. $amnd + cmne = ac^2$

luego $ac^2 = ab^2 + bc^2$

236. (Cor.) En un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al de la hipotenusa, ménos el del otro cateto.

237. En un triángulo rectángulo el cuadrado sobre la perpendicular, bajada desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa, es igual al rectángulo, formado por las proyecciones de ambos catetos.

Hip. $\sphericalangle acb = R$, $cl \perp ab$. *Tés.* $cl^2 = al \times bl$

Dem. Formando sobre ab el $\square abed$, prolongando cl sobre l, hasta que corte de en m, tomando $ah = al$, luego tambien $hd = bl$, y trazando por fin $hn \parallel al$, tendremos:

$cl^2 = ac^2 — al^2$ (236)

pero $ac^2 = almd$ (234) y $al^2 = alnh$

luego $cl^2 = almd — alnh = hnmd = al \times bl$

238. En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado, opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el duplo del rectángulo, formado por el uno de estos dos y la proyeccion del otro sobre él.

Hip. $\sphericalangle abc < R$. *Tés.* $ac^2 = bc^2 + ab^2 — 2\, bc \times bd$

Dem. $ac^2 = ad^2 + cd^2$, pero $cd = bc — bd$

luego $ac^2 = ad^2 + (bc — bd)^2$

ó $ac^2 = ad^2 + bc^2 + bd^2 — 2\, bc \times bd$

pero $ad^2 + bd^2 = ab^2$

luego $ac^2 = ab^2 + bc^2 — 2\, bc \times bd$.

239. En un triángulo obtusángulo el cuadrado del lado, opuesto al

ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas el duplo del rectángulo, formado por el uno de estos dos lados y la proyeccion del otro sobre él.

Hip. $\sphericalangle abc > R$. *Tés.* $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2\, bc \times bd$

Dem. $ac^2 = ad^2 + cd^2$, pero $cd = bc + bd$

luego $ac^2 = ad^2 + (bc + bd)^2$

ó $ac^2 = ad^2 + bc^2 + bd^2 + 2\, bc \times bd$

pero $ad^2 + bd^2 = ab^2$

luego $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2\, bc \times bd$

240. Trazando en un triángulo cualquiera una mediana; la suma de los cuadrados sobre los dos lados no divididos será igual al doble cuadrado sobre la mediana, mas el medio cuadrado sobre el tercer lado.

Hip. $bd = cd$, *Tés*, $ab^2 + ac^2 = 2\, ad^2 + \frac{1}{2}\, bc^2$

Dem. Bajando $am \perp bc$ será:

$ab^2 = bd^2 + ad^2 - 2\, bd \times md$ (238)

y $ac^2 = cd^2 + ad^2 + 2\, cd \times md$ (239)

Sumando estas 2 ecuaciones, y observando que $bd = cd$, será

$ab^2 + ac^2 = 2\, bd^2 + 2\, ad^2$

pero $2\, bd^2 = \frac{1}{2}\, bc^2$ (232)

luego $ab^2 + ac^2 = 2\, ad^2 + \frac{1}{2}\, bc^2$

241. En un paralelógramo la suma de los cuadrados sobre los cuatro lados es igual á la suma de los cuadrados sobre las diagonales.

Dem. Segun el teor. anterior tenemos:

$ab^2 + ac^2 = 2\, ao^2 + 2\, bo^2$

ó $= \frac{1}{2}\, ad^2 + \frac{1}{2}\, bc^2$

luego $ab^2 + ac^2 + bd^2 + cd^2 = ad^2 + bc^2$

242. En un cuadrilátero la suma de los cuadrados sobre los cuatro lados es igual á la suma de los cuadrados sobre las diagonales, mas el cuádruplo cuadrado sobre la recta que une los puntos medios de las diagonales.

Tés. $ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2 = ac^2 + bd^2 + 4\, mn^2$

Dem. Trazando bn y dn tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} ab^2 + bc^2 = 2\, bn^2 + 2\, an^2 \\ \text{y } ad^2 + dc^2 = 2\, dn^2 + 2\, cn^2 \\ \text{pero } bn^2 + dn^2 = 2\, bm^2 + 2mn^2 \end{array}\right\} (240.)$$

luego $2\,(bn^2 + dn^2) = 4\, bm^2 + 4mn^2$

„ $ab^2 + bc^2 + ad^2 + dc^2 = 4\, bm^2 + 4\, mn^2 + 2\, an^2 + 2\, cn^2$

ó $= bd^2 + 4\, mn^2 + ac^2$

243. En todo cuadrilátero inscrito la suma de los rectángulos, formados por dos lados opuestos, es igual al rectángulo, formado por las diagonales. (Ptolemeo, 125 despues de J. C.)

Dem. Trazando bm, de modo que $\sphericalangle abm = cbd$, será:

$\triangle\, abm \sim cbd$, y $\triangle\, cbm \sim abd$, de donde se sigue:

$$ab : am = bd : cd \quad \text{y} \quad bc : cm = bd : ad$$

luego $am.\, bd = ab.\, cd$ y $cm.\, bd = bc.\, ad$

luego $(am + cm)\, bd = ab\,.\, cd + bc\,.\, ad$

ó $ac \times bd = ab \times cd + bc \times ad$

CAPITULO QUINTO.

PROPORCIONALIDAD DE LAS SUPERFICIES.

Teoremas.

244. Dos rectángulos que tienen iguales alturas están entre sí, como sus bases.

Hip. $ad = eh$. *Tés.* Rctg. $abcd : efgh = ab : ef$

Dem. Pueden ocurrir 2 casos.

Caso 1. Siendo ab y ef conmensurables, y m la medida comun, sea $ab = pm$, y $ef = qm$.

luego $ab : ef = p : q$

Trazando ahora por los puntos de division paralelas á ad y eh será:

Rctg. $aild = ersh$

y por ser iguales todos los Rctg. tendremos tambien:

Rctg. $abcd = p.\, aild$, y Rctg. $efgh = q.\, aild$

luego Rctg. $abcd : efgh = p : q = ab : ef$

Caso 2. ab y ef sean inconmensurables, y $ef < ab$, pongamos m, la medida de ab, sobre ef; por ser inconmensurables ab y ef, no podrá coincidir el último punto de division, por ej. u, con f; trazando $uv \ddagger eh$ tendremos. etc. etc. El teor. 202 nos dirá que hacer.

245. Dos rectángulos que tienen iguales bases, están entre sí, como sus alturas.

Dem. En los rectángulos pueden considerarse las alturas como bases y viceversa.

246. Dos rectángulos son entre sí, como los productos de sus bases y alturas.

Dem. Colocando los 2 Rctg. $abcd$ y $efgh$ uno al lado de otro, de modo que los vértices de 2 $\sphericalangle$ coincidan y sus lados formen rectas, trazemos prolongando ab sobre b, y gf sobre f otro Rctg. $bmfe$, y tendremos:

Rctg. $abcd : bmfe = dc : ef$

y Retg. $bmfe : efgh = bc : eh$

Multiplicando las 2 proporciones tendremos:

Rctg. $abcd : efgh = dc \cdot bc : ef \cdot eh$

247. Dos paralelógramos de igual altura son proporcionales á sus bases.

248. Dos paralelógramos de igual base son proporcionales á sus alturas.

249. Dos paralelógramos son entre sí, como los productos de sus bases y alturas.

Dem. Véase el teor. 246.

250. Dos triángulos que tienen iguales alturas están entre sí, como sus bases.

251. Dos triángulos de igual base son proporcionales á sus alturas.

252. Dos triángulos son entre sí, como los productos de sus bases y alturas

253. Dos paralelógramos que tienen un ángulo igual son entre sí, como los productos de los lados que forman aquel ángulo.

254. Dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí, como los productos de los lados que comprenden aquel ángulo.

Dem. Los $\triangle$ *abc* y *ade* tienen el $\sphericalangle$ *a* igual.

Trazando *be* tendrán los $\triangle$ *abc* y *abe* la misma altura, de donde se sigue que

$\triangle abc : abe = ac : ae$

Tambien los $\triangle$ *abe* y *ade* tienen la misma altura, por lo cual será:

$\triangle abe : ade = ab : ad$

Multiplicando las 2 proporciones tendremos:

$\triangle abc : ade = ac \cdot ab : ae \cdot ad$

255. Dos triángulos semejantes son entre sí, como los cuadrados sobre dos lados homólogos.

Dem. $\triangle abc : def = ab \cdot ac : df \cdot de$

Multiplicando la 2. razon por $\frac{ab}{ac} = \frac{df}{de}$ será:

$\triangle abc : def = ab^2 : df^2$

256. Todo cuadrilátero se puede descomponer por una diagonal en dos triángulos, que son entre sí, como las partes de la otra diagonal.

Tés. $\triangle abc : acd = bo : do$

Dem. Trazando las 2 alturas *bm* y *dn* será:

$\triangle abc : acd = bm : dn$ (251) $= bo : do$ por ser $\triangle bom \sim don$

257. (Cor.) Si una trasversal corta á los lados de un triángulo ó á las prolongaciones de ellos; serán iguales los productos de las tres partes no consecutivas de los lados. (Menelao, 80 despues de J. C.)

Tés. $af \,.\, be \,.\, cd = fb \,.\, ec \,.\, da$

Dem. Trazando $bm \ddagger ac$ serán:

$\triangle\, adf \sim bmf$ y $\triangle\, bme \sim cde$

luego $af : fb = ad : bm$

y $be : ec = bm : cd$

por tanto $af \,.\, be : fb \,.\, ec = ad : cd$

Multiplicando los términos extremos y medios tendremos:

$af \,.\, be \,.\, cd = fb \,.\, ec \,.\, da.$

258. (Cor.) Trazando tres trasversales que pasan por los tres vértices de un triángulo, y que al mismo tiempo se cortan en un punto; serán iguales los productos de las tres partes de los lados (Ceva, 1680 despues de J. C.)

Tés. $af \,.\, bd \,.\, ce = fb \,.\, dc \,.\, ea$

Dem. Considerando ad como trasversal del $\triangle\, bcf$, y be como trasversal del $\triangle\, acf$ tenemos segun el teor. anterior:

$af \,.\, bd \,.\, co = ba \,.\, of \,.\, cd$

y $ab \,.\, of \,.\, ce = ac \,.\, co \,.\, bf$

Multiplicando las 2 ecuaciones la una por la otra, será:

$af \,.\, bd \,.\, co \,.\, ab \,.\, of \,.\, ce = ba \,.\, of \,.\, cd \,.\, ac \,.\, co \,.\, bf$ y quitando los términos iguales tendremos:

$af \,.\, bd \,.\, ce = fb \,.\, dc \,.\, ea$

259. (Recípr.) Si los lados de un triángulo están divididos de tal manera que los productos de las tres partes no consecutivas sean iguales; se cortarán en un punto las rectas que unen los puntos de division con los vértices opuestos.

260. (Cor.) Las tres medianas en un triángulo se cortan en un punto, y cada una de ellas se divide por este punto en dos partes, de las cuales la una es el duplo de la otra.

Dem. Segun la hip. los productos de las tres partes no consecutivas de los lados son iguales, por lo cual segun el teor. 258 las medianas deben cortarse en un punto.

Para demostrar la tésis 2. tracemos fd que será $\ddagger ac$ (161) y tambien $\frac{1}{2}\, ac$, lo que se deduce fácilmente de la proporcion $bd : bc = df : ca$. Por ser $\triangle\, aoc \sim dof$ tendremos $ao : od = ac : df = 2 : 1$. De la misma manera podemos demostrar que $co : of = 2 : 1$, y $bo : oe = 2 : 1$.

261. (Cor.) Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.

Dem. Segun el teor. 176 tenemos:

$bd : dc = ab : ac$

$ce : ea = bc : ba$

$af : fb = ca : cb$

luego $bd \,.\, ce \,.\, af = dc \,.\, ea \,.\, fb$, por lo cual las bisectrices deben cortarse en un solo punto. (259).

262 (Cor.) Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto.

Dem. Por ser semejantes $\triangle$ *abc* y *acf*, $\triangle$ *bcf* y *bad*, $\triangle$ *cad* y *cbc* tenemos:

$$ae : af = ab : ac$$
$$fb : bd = bc : ba$$
$$cd : ce = ca : cb$$

luego $ac \,.\, fb \,.\, cd = af \,.\, bd \,.\, ce$, por lo que las alturas deben cortarse en un punto (259).

263. (Cor.) Las tres perpendiculares, levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo, se cortan en un punto, que está á igual distancia de los tres vértices del triángulo.

Dem. Suponiendo que estén levantadas solamente *do* y *fo* $\perp$ á *bc* y *ab*, juntemos *o* con *a*, *b* y *c*, y tendremos:

$\triangle\, bdo \cong cdo$, y $\triangle\, bfo \cong afo$, luego $ao = bo = co$, y por consiguiente $\triangle\, aco$ será isósceles, en el cual *co*, levantada $\perp$ en el punto medio de *ac*, ha de pasar por el vértice *o*; luego las 3 $\perp$ se cortan en un solo punto (57).

264. (Cor.) Los puntos donde se cortan las tres alturas, las tres medianas y las tres perpendiculares, levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo, están situados en una sola recta, y la distancia entre el primero y el segundo, y entre el segundo y el tercero es como 2 : 1

Tés. *h*, *s* y *o* están situados en una sola recta.

Dem. Trazando *fg*, *hs* y *so* será:

$\triangle\, ach \sim fgo$ (166), luego $ch : fo = ca : fg = 2 : 1$

Ademas $cs : sf = 2 : 1$ (260), y $\triangle\, hcs \sim sfo$ (166).

de donde se saca que tambien $hs : so = 2 : 1$

En fin por ser $\sphericalangle\, csh = fso$ han de formar *hs* y *so* una sola recta.

265. Dos polígonos semejantes son entre sí, como los cuadrados de dos lados homólogos ó de dos diagonales homólogas.

Tés. $abcde : fghil = bc^2 : gh^2 = bd^2 : gi^2$

Dem. 1.) Descomponiendo los 2 polígonos desde *d* é *i* en $\triangle$ semejantes tenemos:

$$\triangle\, bcd : ghi = bc^2 : gh^2$$
$$\triangle\, abd : fgi = ab^2 : fg^2 = bc^2 : gh^2$$
$$\triangle\, aed : fli = ae^2 : fl^2 = bc^2 : gh^2$$

luego $\triangle\, bcd : ghi = abd : fgi = aed : fli$

ó $\triangle\, bcd + abd + aed = ghi + fgi + fli$

portanto $abcde : fghil = bc^2 : gh^2$

2.) $bc^2 : gh^2 = bd^2 : gi^2$

luego $abcde : fghil = bd^2 : gi^2$

266. (Cor.) Formondo sobre los lados de un triángulo rectángulo polígonos semejantes; será el polígono de la hipotenusa igual á la suma de los polígonos sobre los catetos.

267. Dos polígonos regulares de igual número de lados son entre sí, como los cuadrados de los lados.

268. Dos polígonos regulares de igual número de lados son entre sí, como los cuadrados de los radios de círculos inscritos ó circunscritos.

Dem. Trazando *oa*, *ob*, *pg*, *ph* y las $\perp$ *or* y *ps* serán *or* y *ps* los radios de los círculos inscritos, *oa* y *pg* los de los círculos circunscritos.

$$\triangle\, abo : ghp = oa^2 : pg^2 = or^2 : ps^2$$

$$\text{luego } 6 \triangle\, abo : 6\, ghp = oa^2 : pg^2 = or^2 : ps^2$$

$$\text{ó} \quad abcdef : ghilmn = oa^2 : pg^2 = or^2 : ps^2$$

269. Dos círculos son entre sí, como los cuadrados de sus radios.

Dem. Véanse los teor. 201 y 268.

270. Dos sectores de radios iguales son proporcionales á sus respectivos ángulos centrales.

Dem. Los 2 sectores pueden ser conmensurables é inconmensurables; por esto véase el teor. 202.

271. (Cor.) Un sector es á un círculo, como el respectivo ángulo central es á 4 R.

272. Dos sectores de iguales ángulos son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Dem. Véase el teor 204.

CAPITULO SEXTO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES.

Medir el área de una superficie es determinar cuántas veces la unidad de la medida de superficie está contenida en ella. En la determinacion de las áreas de las superficies se toma por unidad un cuadrado cuyo lado sea la medida de longitud, llamado metro cuadrado. Los múltiplos y snbmúltiplos del metro cuadrado son los siguientes:

1	miriám.	cuadr.	=	100000000	metr.	cuadr.
1	kilóm.	„	=	1000000	„	„
1	hectóm.	„	=	10000	„	„
1	decám.	„	=	100	„	„
1	decím.	„	=	0,01		„
1	centím.	„	=	0,0001		„
1	milím.	„	=	0,000001		„

Teoremas.

273. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Tés. Rcgt. $abcd = ab \cdot bd$

Dem. Siendo el $\square$ $amno$ la unidad de la medida de superficies será $amno = 1$, y $am \times ao = 1$

Tambien $abcd : amno = ab \times ad : am \times ao$

$amno = am \times ao$

luego $abcd = ab \times ad$

274. El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.

275. El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.

276. El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases.

Tés. $abcd = dc \times \frac{1}{2}(ab + dc)$.

Dem. Trazando la diagonal bd tendremos los 2 $\triangle$ abd y cdb, cuyas bases son ab y cd, y cuya altura dc. Segun el teor. 275 será:

$$abd = \tfrac{1}{2}\, ab \times de \quad \text{y} \quad cdb = \tfrac{1}{2}\, cd \times dc$$

luego $abcd = \frac{1}{2}\, ab \times dc + \frac{1}{2}\, cd \times dc = dc \times \frac{1}{2}(ab + cd)$.

277. El área de un cuadrilátero cualquiera se halla descomponiéndolo en triángulos ó trapecios, cuyas áreas pueden determinarse segun los teoremas anteriores.

278. El área de un polígono circunscrito á una circunferencia es igual á la mitad del producto del perímetro por el radio.

Dem. Uniendo o con todos los vértices, el polígono quedará dividido en $\triangle$ que todos tienen por altura el radio (r), tomando por bases los lados del polígono. Por esto tendremos:

$$\triangle\, abo = \frac{ab \cdot r}{2},\ \triangle\, bco = \frac{bc \cdot r}{2} \text{ etc.}$$

luego $\quad abcde = \dfrac{ab \cdot r}{2} + \dfrac{bc \cdot r}{2} + \text{etc.}$

$$= (ab + bc + cd + de + ea)\frac{r}{2}$$

279. El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto del perímetro por el radio del círculo inscrito.

Dem. Véase el teor. anterior.

280. El área de un círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio.

281. El área de un sector es igual á la mitad del producto de su árco por el radio.

282. El área de una corona (anillo) es igual á la del círculo de mayor radio, ménos la del círculo de radio menor.
283. El área de una parte de la corona (anillo) es igual á la del sector de mayor radio, ménos la del sector de radio menor.
284. Siendo l el lado de un polígono regular inscrito de n lados, y r el radio del círculo; será el lado del polígono regular inscrito de 2 n lados (ld) igual á

$$r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}}$$

Dem. Siendo ab el lado del polígono regular de n lados tracemos el diámetro $de \perp ab$, y juntemos a con d; entónces será ad el lado del polígono regular de 2 n lados. Queriendo determinar ad por medio de ab y od, unamos a con o y c, y pongamos $ab=l$, y $do=r$; y tendremos:

$$co^2=ao^2-ac^2=r^2-\frac{l^2}{4}$$

luego $co=\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}=\sqrt{\frac{r^2}{4}\left(4-\frac{l^2}{r^2}\right)}$

$$co=\frac{r}{2}\cdot\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}$$

y por ser $cd=do-co$ será:

$$cd=r-\frac{r}{2}\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}$$

En el $\triangle$ dac tenemos $ad^2=de\,.\,cd$, y poniendo $de=2r$, y $cd=r-\frac{r}{2}\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}$ será:

$$ad^2=2r\left(r-\frac{r}{2}\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}\right)=r^2\left[2-\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}\right]$$

y $ad\,(ld)=r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{l^2}{r^2}}}$

285. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 6 lados es igual al radio del círculo.

Dem. Buscando primero el valor del lado de un $\triangle$ regular inscrito abc tracemos las medianas ad y be que se cortarán, de modo que $ao=2\ od$ (260), por lo cual siendo $ao=r$ será $od=\frac{r}{2}$.

En el $\triangle$ bod tenemos:

$bd^2=bo^2-do^2$ ó lo que es lo mismo

$$\left(\frac{l_3}{2}\right)^2=r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\frac{l_3^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$l_3^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula del teor. anterior será:

$$l_6 = r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{(r\sqrt{3})^2}{r^2}}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{3r^2}{r^2}}} = r$$

286. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 12 lados es igual á $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

287. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 24 lados es igual á $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

288. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 8 lados es igual á $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Dem. Buscando primero el valor del lado de un cuadrado inscrito tracemos las 2 diagonales *ac* y *bd*, y tendremos:

$dc^2 = do^2 + co^2$ ó lo que es lo mismo

$$l_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

luego $l_4 = r\sqrt{2}$

Poniendo este valor en la fórmula del teor. 284 tendremos:

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{(r\sqrt{2})^2}{r^2}}} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

289. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 16 lados es igual á $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

290. (Cor.) El lado de un polígono regular inscrito de 32 lados es igual á $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

291. Siendo l el lado de un polígono regular inscrito de n lados y r el radio del círculo; será el lado del polígono regular circunscrito de n lados (L) igual á $\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}}$

Dem. Suponiendo que *ab* sea el lado del polígono regular inscrito tracemos los radios *oa* y *ob*, y *oc* $\perp$ *ab*, la que prolongada cortará la circunferencia en *d*; levantando ahora una $\perp$ á *do* en el punto *d*, y prolongándola hasta que corte los 2 radios prolongados en e y f, será ef el lado del polígono regular circunscrito de n lados.

Por ser $\triangle\, efo \sim abo$ será $ef : ab = do : co$

pero $co = \sqrt{ao^2 - ac^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

por esto $ef : l = r : \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

luego $ef \,.\, \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = r \,.\, l$

ó $ef\,(L) = \frac{r \,.\, l}{\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{2r \,.\, l}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$

292. (Cor.) El lado de un polígono regular circunscrito de 6 lados es igual á $\frac{2r}{\sqrt{3}}$

293. El área de un polígono regular inscrito de $2n$ lados es la media proporcional entre el polígono regular inscrito y el circunscrito de n lados.

Dem. Siendo ab el lado del polígono regular inscrito de n lados, será de el lado del polígono regular circunscrito de n lados. Uniendo ademas f con a y b, y trazando las bisectrices oh y oi serán af y bf lados del polígono regular inscrito de $2n$ lados, y hi el lado del polígono regular circunscrito de $2n$ lados. Designando el área del polígono regular inscrito de n lados por a

„ „ „ „ „ circunscrito „ „ „ „ A

„ „ „ „ „ inscrito „ $2n$ „ „ ar

„ „ „ „ „ circunscrito „ „ „ „ AR

será: $a = n \,.\, \triangle\, abo = 2n \,\triangle\, ago$

$A = n \,.\, \triangle\, deo = 2n \,\triangle\, dfo$

$ar = 2n \,\triangle\, afo$

$AR = 2n \,\triangle\, hio$

luego $a : ar = \triangle\, ago : afo = go : fo$

y $ar : A = \triangle\, afo : dfo = ao : do$

pero $go : fo = ao : do$

por lo cual $a : ar = ar : A$

294. El área de un polígono regular circunscrito de n lados es al área del polígono regular circunscrito de $2n$ lados, como la suma de las áreas del polígono regular circunscrito de n lados é inscrito de $2n$ lados es al duplo del área del polígono regular inscrito de $2n$ lados.

Tes. $A : AR = A + ar : 2\,ar$

Dem. $A : AR = \triangle\, dfo : hio = df : hi$

y $A : ar = \triangle\, dfo : afo = do : ao = do : fo = dh : fh$

luego $A + ar : 2\,ar = dh + fh : 2\,fh = df : hi$

por tanto $A : AR = A + ar : 2ar$

Explicaciones.

Llamamos *rectificacion de la circunferencia* la determinacion de ella, y *cuadratura del círculo* la determinacion de este. Fundándose todos los cálculos del círculo en la relacion que hay entre la circunferencia y su diámetro, la cual se expresa por el número π, es preciso, saber el valor de este número. Si π significa la razon de la circunferencia al diámetro, significará el valor de circunferencia, siendo el diámetro 1, y la mitad de ella, siendo el radio 1.

Para determinar el valor de π formemos un polígono regular inscrito y circunscrito de n lados; duplicándo mas y mas el número de los lados en ambos polígonos. se acercarán tambien los perímetros mas y mas á la circunferencia. Calculando por medio del sistema decimal los perímetros tendremos el valor de la circunferencia exactamente hasta el lugar decimal que tengan los dos perímetros comunes.

Lo mas sencillo es, comenzar con el polígono regular inscrito de seis lados, cuyo lado es $= r$ (285). Aplicando sucesivamente las fórmulas de los teoremas 284 y 291, las cuales siendo $r = 1$ serán:

$$ld = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}, \text{ y } L = \frac{2\,l}{\sqrt{4 - l^2}}$$

y tendremos la tabla siguiente:

Núm. de los lados.	*Valor del perímetro del políg. inscrito.*	*Valor del perímetro del políg. circunscrito.*
6	6,0000000	6,9282032
12	6,2116570	6,4307806
24	6,2652572	6,3193198
48	6,2787004	6,2787004
96	6,2820639	6,2854291

Los valores de los dos perímetros de 96 lados concuerdan con los dos primeros lugares decimales, que expresan tambien el valor de la circunferencia, el que siendo $r = 1$ será 6, 28. . . ., y luego π será 3, 14. . . .

Arquímedes (212 ántes de J. C.) ya determinó la razon de la circunferencia al diámetro, y segun él el valor de π era un poco ménos que $\frac{22}{7}$. Pedro Mecio (1550) la determinó por $\frac{355}{113}$, y Ludolfo de Cenlen (1586) hasta 32 lugares decimales, por la cual el valor de π se llama tambien *número de Ludolfo.* Despues han aumentado los lugares decimales, por ej. Lehmann hasta 260, y Richter hasta 500 . $\pi = 3,1415926535..............$

Teoremas.

295. La circunferencia de un círculo, cuyo radio es r, es igual á $2\,r\,\pi$.

Dem. Siendo la razon de la circunnferencia (C) al diámetro $= \pi$, y el diámetro de un círculo, cuyo radio es $r = 2\,r$ tendremos:
$\frac{C}{2\,r} = \pi$, luego $C = 2\,r\,\pi$

296. El área de n grados de un círculo, cuyo radio es r, es igual á $\frac{r\,\pi\,.\,n}{180}$

Dem. Segun el teor. 203 tenemos:
$arc.\ n : 2\,r\,\pi = n^\circ : 360^\circ$
luego $arc.\ n = \frac{2\,r\,\pi\,.\,n}{360} = \frac{r\,\pi\,.\,n}{180}$

297. El área de un círculo, cuyo radio es r, es igual á $r^2\,\pi$.

Dem. Segun el teor. 280 es el área (A) de un círculo$= \frac{r\,.\,C}{2}$;
pero $C = 2\,r\,\pi$ (295); luego
$A = \frac{2\,r^2\,\pi}{2} = r^2\,\pi$

298. El área de un sector de n grados de un círculo, cuyo radio es r, es igual á $\frac{arc.\ n\,.\,r}{2}$

Dem. Los sectores de un círculo están en proporcion á sus respectivos arcos, y al círculo entero corresponde la circunferencia entera, por lo cual tenemos:
$$\text{sect. } n : r^2\,\pi = \text{arc. } n : 2\,r\,\pi$$
luego sect. $n = \frac{\text{arc. } n\,.\,r^2\,\pi}{2\,r\,\pi} = \frac{\text{arc. } n\,.\,r}{2}$

299. Describiendo sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo semicírculos; la suma de las dos lunillas, formadas por los arcos, será igual al triángulo. (Hipócrates 450 ántes de J. C.)

Dem. Designando las 2 lunillas por L 1 y L 2 será:
$$ac^2 + bc^2 = ab^2 \quad (235)$$
luego $\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{bc}{2}\right]^2\pi = \frac{1}{2}\left[\frac{ab}{2}\right]^2\pi$
es decir (297) la suma de los semicírculos sobre los catetos es igual al semicírculo de la hipotenusa.
Restando ahora en ambos lados los segmentos designados por

S 1 y S 2 tendremos:
L 1 + L 2 = $\triangle abc$

300. Dividiendo el diámetro de un semicírculo en dos partes cualesquiera, y describiendo sobre ellas dos otros semicírculos; la hoz, formada por las tres semicircunferencias, será igual al círculo teniendo por diámetro la semicuerda, levantada perpendicularmente al diámetro grande en su punto de division. (Arquímedes, 212 ántes de J. C.).

Dem. Designando la hoz por H, y el círculo sobre la semicuerda *cd* por *CR* será:

$$ab^2 = ac^2 + bc^2 + 2\,ac\,.\,bc \quad (231)$$
$$\text{ó} \quad ab^2 = ac^2 + bc^2 + 2\,cd^2 \quad (224)$$
$$\text{luego } ab^2 - ac^2 - bc^2 = 2\,cd^2$$
$$,, \ \tfrac{1}{2}\left[\frac{ab}{2}\right]^2 \pi - \tfrac{1}{2}\left[\frac{ac}{2}\right]^2 \pi - \tfrac{1}{2}\left[\frac{bc}{2}\right]^2 \pi = \left(\frac{cd}{2}\right)^2 \pi$$

es decir (297.) $H = CR$.

EJERCICIOS PRACTICOS.

Preliminares.

Asi como las demostraciones de los teoremas necesitan de los axiomas, del mismo modo las construcciones de los problemas suponen ciertos postulados, los cuales son los cuatro siguientes:

1. Entre dos puntos trazar una recta.
2. Prolongar indeterminadamente una recta dada.
3. Desde un punto de una recta cortar una parte dada.
4. Trazar con un radio dado un arco ó una circunferencia.

Los dos primeros postulados se resuelven por medio de la regla, los dos últimos mediante el compas.

Fuera de las tres partes esenciales de un problema hay otras dos partes que son *muy importantes*, aunque no esenciales, á saber: el análisis y la determinacion. En todo problema tenemos cantidades dadas y pedidas; el *análisis* consiste en hallar las relaciones entre las unas y las otras. La *determinacion* averigua las condiciones, bajo las que el problema es posible, y tambien, de cuántas maneras se puede resolverlo.

Mucho sirven para el análisis los lugares geométricos. Si todos los puntos de una línea, sea recta sea curva, satisfacen ciertas condiciones, y todos los puntos fuera de ella no las satisfacen, llaman tal línea un *lugar geométrico.*

PROBLEMAS GRÁFICOS (*)

RELATIVOS AL CAPÍTULO PRIMERO.

El lugar geométrico del punto que del punto *a* tiene la distancia *bc*, es la circunferencia trazada desde *a* con el radio *bc*.

El lugar geométrico del punto que con los dos puntos *d* y *e* está situado en la misma recta, es la recta trazada por *d* y *e*.

1. Dada la recta *fg* y el punto *h*; hallar en *fg* un punto que de *h* tenga la distancia *i k*.
2. Dada la circunferencia *l* y el punto *m*; encontrar en *l* un punto que de *m* tenga la distancia *no*.
3. Dados los dos puntos *p* y *q*; buscar un punto que de *p* resp. de *q* tenga la distancia *rs* resp. *tu*.
4. Dados los dos puntos *a* y *b*; determinar un punto que de *a* y *b* tenga la distancia igual á la recta que une *a* con *b*.
5. Dados los tres puntos *c*, *d* y *e*; buscar un punto que de *c* tenga la distancia *fg*, y que esté situado con *d* y *e* en la misma recta.
6. Construir un ángulo que sea igual al ángulo *hik*.
7. En el punto *l* de la recta *mn* formar el ángulo *opq*.
8. Por el punto *r* trazar una paralela á la recta *st*.
9. Por el punto *a* trazar una recta que con la recta *bc* forme el ángulo *def*.

PROBLEMAS GRÁFICOS

RELATIVOS AL CAPÍTULO SEGUNDO.

El lugar geométrico del punto que equidista de los dos puntos *g* y *h*, es la perpendicular á la recta que los une y pasa por su punto medio.

(*) Llámanse problemas *gráficos* los que se resuelven con la regla y el compas; los que se resuelven por medio del cálculo, se dicen *numéricos.*

El lugar geométrico del punto que equidista de las dos secantes *ik* y *ln*, son las bisectrices de ambos pares de los ángulos opuestos por el vértice.

El lugar geométrico del punto que á la recta *mn* tiene la distancia *op*, son las dos rectas qne teniendo á *mn* la distancia *op* son paralelas á *mn*.

El lugar geométrico del punto que equidista de las dos paralelas *qr* y *st*, es la recta que pasando por el punto medio de la distancia entre *qr* y *st* es paralela á estas.

El lugar geométrico para el centro del círculo cuyo radio es R que

a) pasa por el punto *u*, es la circunferencia trazada desde *u* con el radio R,

b) toca á la recta *ab*, son las dos rectas que teniendo á *ab* la distancia R son paralelas á *ab*,

c) toca exteriormente al círculo *o* cuyo radio es *r*, es la circunferencia trazada desde *o* con el radio $R + r$,

d) toca interiormente al círculo *o* cuyo radio es *r*, es la circunferencia trazada desde *o* en el radio $r—R$ (si $r > R$) ó con el radio $R—r$ (si $R > r$),

e) corta á la recta *cd* de modo que una parte de esta, *ef*, sea cuerda, son las dos rectas paralelas á *cd*,

f) corta al círculo *o* cuyo radio es *r* de modo que *gh* sea cuerda, son dos circunferencias concéntricas con *o*,

g) corta á la recta *ik* de modo que forme con esta el ángulo *lmn*, son dos rectas paralelas á *ik*,

h) corta al círculo *o* cuyo radio es *r* de modo que forme con él el ángulo *opq*, son dos circunferencias concéntricas con *o*.

El lugar geométrico para el centro del círculo que

a) pasa por los dos puntos *r* y *s*, es la perpendicular levantada en el punto medio de *rs*,

b) toca á la recta *tu* en el punto *v*, es la perpendicular levantada á *tu* en *v*,

c) toca al círculo *o* en el punto *a*, es la recta que pasa por *o* y *a*,

d) toca á las dos secantes *ab* y *cd*, son las bisectrices de ambos pares de los ángulos opuestos por el vértice,

e) toca á las dos paralelas *de* y *fg*, es la recta que pasando por el punto medio de la distancia entre *de* y *fg* es paralela á estas,

f) corta á las dos paralelas *hi* y *kl* de modo que las partes de estas, *mn* y *pq*, sean cuerdas, es una recta paralela á *hi* y *kl*,

g) corta á las dos paralelas *qr* y *st* de modo que forme con *qr* el ángulo *abc*, y con *st* el ángulo *def*, son dos rectas paralelas á *qr* y *st*,

h) toca á la recta *gh* y corta á la recta *ik* de modo que una parte de la última, *lm*, sea cuerda, es una recta paralela á *gh* é *ik*,

i) toca á la recta *mn* y corta á la recta *op* de modo que forme con la última el ángulo *qrs*, son dos rectas paralelas á *mn* y *op*.

El lugar geométrico para el punto medio de las cuerdas del círculo *o*, las cuales

a) pasan por el punto *p*, situado en la circunferencia ó dentro del círculo, es la circunferencia que tiene por diámetro la recta *op*,

b) pasan por el punto *q*, situado fuera del círculo, es el arco interior del círculo que tiene por diámetro la recta *oq*,

c) tienen la longitud *rs*, es la circunferencia trazada desde *o* con el radio igual á la distancia que tiene *rs* á *o*,

El lugar geométrico para el vértice de un ángulo recto cuyos lados pasan por los dos puntos *t* y *u*, son las dos semicircunferencias que tienen por diámetro la recta *tu*.

El lugar geométrico para el vértice del ángulo *abc* cuyos lados pasan por los dos puntos *d* y *e*, son los dos arcos que tienen por cuerda la recta *de*, y que comprenden al ángulo *abc* como ángulo inscrito.

El lugar geométrico para el vértice del ángulo tangencial *fgh* del círculo *o*, es una circunferencia concéntrica con *o*.

El lugar geométrico para el punto extremo de la tangente determinada *ik* del círculo *o*, es una circunferencia concéntrica con *o*.

10. En un punto de una recta levantar una perpendicular á esta.

11. Desde un punto fuera de una recta bajar una perpendicular á esta.

12. Dividir una recta en dos partes iguales.

13. Dividir un ángulo en dos partes iguales.

14. Dividir un ángulo recto en tres partes iguales.

15. Dados una recta y dos puntos fuera de esta; buscar en la recta un punto que equidiste de los dos puntos dados.

16–18. Dados la recta *mn* y los dos puntos *a* y *b*; hallar en *mn* un punto *p*, de modo que

a) *ap* y *bp* formen con *mn* ángulos iguales,

b) $ap + bp$ sean un mínimo,

c) $ap — bp$ sean un máximo.

19–23. Construir un triángulo rectángulo, dados:

a) los dos catetos,

b) la hipotenusa y un cateto,

c) la hipotenusa y un ángulo adyacente á esta,

d) un cateto y un ángulo agudo,

e) un cateto y la perpendicular desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa.

24–27. Construir un ángulo isósceles, dados:

a) la base y el ángulo del vértice,
b) la base y la perpendicular desde el vértice á esta,
c) un lado y la perpendicular desde el vértice á la base,
d) la base y la perpendicular desde un punto extremo de esta al lado opuesto.

28. Construir un triángulo equilátero, dada la perpendicular desde un vértice al lado opuesto.

29–32. Construir un triángulo, dados:
a) un lado, un ángulo adyacente á este, y la diferencia de los otros dos lados,
b) dos ángulos y la suma ó la diferencia de dos lados,
c) dos ángulos y la suma de los tres lados,
d) dos ángulos y la diferencia entre la suma de dos lados y el tercero.

33. Trazar por un punto una recta que equidiste de otros dos puntos dados.

34. Dados dos paralelas y un punto; trazar por el punto una recta, de modo que la parte entre las dos paralelas sea igual á una recta dada.

35–37. Construir un cuadrado, dada:
a) la diagonal,
b) la suma de un lado y la diagonal,
c) la diferencia de un lado y la diagonal.

38–40. Construir un rectángulo, dados:
a) la diagonal y un ángulo que forman las diagonales,
b) el perímetro y la diagonal,
c) la diferencia de los lados consecutivos y la diagonal.

41–44. Construir un rombo, dados:
a) un lado y una diagonal,
b) las dos diagonales,
c) el perímetro y la suma de las diagonales,
d) un ángulo y la diferencia de las diagonales.

45–46. Construir un paralelógramo, dados:
a) las diagonales y un ángulo formado por estas,
b) un lado y las diagonales.

47–50. Construir un trapecio, dados:
a) uno de los lados paralelos, los lados no paralelos, y un ángulo comprendido,
b) los lados paralelos, uno de los lados no paralelos, y una diagonal,
c) la suma de los lados paralelos, las diagonales, y uno de los lados no paralelos,
d) la suma de los lados paralelos, los ángulos adyacentes á uno de estos, y uno de los lados no paralelos.

51-54. Construir un cuadrilátero, dados:
a) los cuatro lados y un ángulo,
b) tres lados y los ángulos comprendidos,
c) dos lados y tres ángulos,
d) dos lados opuestos y tres ángulos.
55-56 Construir un polígono regular
a) de seis
b) de ocho lados, dado el lado.
57. Construir un polígono de seis lados que tenga los ángulos cóncavos, dados todos los lados y las tres diagonales que unen el primero, segundo y quinto vértice.
58. Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco.
59. Desde un punto de una circunferencia trazar una cuerda igual á una recta dada.
60. Por un punto de una circunferencia dirigir una tangente á esta.
61. Desde un punto fuera de una circunferencia dirigir una tangente á esta.
62. Describir sobre una recta dada un arco, de modo que todos los ángulos inscritos, cuyos lados pasen por los puntos extremos de la recta, sean iguales á un ángulo dado.
63-64. Trazar una circunferencia que pase
a) por dos puntos dados,
b) por tres puntos dados.
65-66. Describir una circunferencia que toque
a) dos rectas dadas,
b) tres rectas dadas.
67. Dados una circunferencia y un punto; trazar por el punto una secante, de modo que la parte limitada por la circunferencia (cuerda) sea igual á una recta dada.
68-70. Dado el radio de un círculo; describir la circunferencia, de modo que
a) pase por un punto dado,
b) toque una recta dada,
c) toque una circunferencia dada.
71-74. Inscribir en un círculo dado
a) un cuadrado,
b) un polígono regular de ocho lados,
c) un triángulo,
d) un polígono regular de seis lados.
75-78. Circunscribir á un círculo las cuatro figuras arriba dichas.

PROBLEMAS GRÁFICOS

RELATIVOS AL CAPITULO TERCERO.

El lugar geométrico del punto en el cual una recta trazada desde el punto l hasta la recta mn está dividida interior y exteriormente en la razon $p : q$, son dos rectas paralelas á la recta mn.

El lugar geométrico del punto en el cual una recta trazada entre las paralelas rs y tu está dividida interior y exteriormente en la razon $m : n$, son dos rectas paralelas á rs y tu.

El lugar geométrico del punto en el cual una recta trazada entre las dos secantes ab y cd, y paralelamente á la tercera ef queda dividida interior y exteriormente en la razon $p : q$, son dos rectas que pasan por el punto de interseccion de las dos secantes.

El lugar geométrico del punto cuyas distancias á las dos secantes gh é ik están en la razon dada $m : n$, son dos rectas que pasan por el punto de interseccion de las secantes.

El lugar geométrico del punto cuyas distancias á los dos puntos l y m están en la razon dada $p : q$, es la circunferencia cuyo diámetro es la distancia entre los dos puntos, en los que la recta lm está dividida interior y exteriormente en la razon $p : q$.

El lugar geométrico del punto en el cual los dos círculos o y p forman ángulos iguales, es un círculo.

El lugar geométrico del punto x en el cual la recta ab trazada desde a á la recta cd está dividida interior y exteriormente de modo que $ab \,.\, ax$ sea igual á m^2, son dos círculos que se tocan en a.

El lugar geométrico del punto y en el cual la cuerda cf trazada desde c está dividida interior y exteriormente de modo que $cf \,.\, cy$ sea igual á un cuadrado dado n^2, son dos líneas paralelas.

El lugar geométrico del punto z en el cual la cuerda gh trazada desde g interior y exteriormente está dividida de modo que $gz \,.\, zh$ sea igual á un cuadrado dado p^2, son dos círculos concéntricos.

El lugar geométrico para el centro de un círculo que corta á las dos rectas ik y lm de modo que una parte de la una, no, sea cuerda, y que forme con la otra un ángulo dado, son dos rectas paralelas.

El lugar geométrico para el centro de un círculo que toca á la recta pq, y corta á la recta rs de modo qua forme con la última un ángulo dado, son dos rectas.

El lugar geométrico para el centro de un círculo que corta á dos rectas de modo que forme con estas ángulos dados, son dos rectas.

El lugar geométrico del punto que forma con los puntos extremos de las dos rectas ab y cd triángulos iguales, son dos rectas.

El lugar geométrico del punto que forma con los puntos extremos de las dos rectas *cf* y *gh* triángulos que son entre sí como la razon dada $m : n$, son dos rectas.

79. Dividir una recta en tres partes iguales.
80. Dividir una recta en dos ó mas partes proporcionales.
81. Hallar la cuarta proporcional á tres rectas.
82. Hallar la media proporcional á dos rectas.
83. Dividir una recta interior y exteriormente en la razon $m : n$.
84. Dividir una recta "armónicamente".
85. Dividir la recta *ab* interior y exteriormente en media y extrema razon, es decir, que sea $ab : ax = ax : xb$ ("sectio aurea").

86-87. Dividir un ángulo recto
a) en cinco, b) en quince partes iguales.

88. Sobre una recta construir un triángulo semejante á otro.
89. Construir un triángulo rectángulo, de modo que el uno de los catetos sea la media proporcional á la hipotenusa y el otro cateto.
90. Sobre una recta como base construir un triángulo isósceles, en el cual el ángulo del vértice sea igual á la mitad de un ángulo de la base.

91-94. Construir un triángulo, dados la razon de los tres ángulos $= 2 : 3 : 5$, y además
a) un lado, b) una altura, c) una mediana, d) una bisectriz.

95-98. Construir un triángulo, dados la razon de los tres ángulos $= 4 : 5 : 6$, y además
a) un lado b) una altura c) una mediana d) una bisectriz.

99. Sobre una recta construir un cuadrilátero semejante á otro.

100-105. Construir un cuadrilátero, dados:
a) *ab*, los ángulos *bcd*, *adc*, *dac* y *cbd*.
b) *ab*, los ángulos *bad*, *bcd*, *abd* y *acb*.
c) *ab*, los ángulos *acb*, *acd*, *bdc* y *adb*.
d) *ab*, $ab : bc$, los ángulos *bad*, *abc* y *bcd*.
e) *ab*, $ab : cd$, los ángulos *bad*, *abc* y *bcd*.
f) *ab*, $ac : bd$, los ángulos *abc*, *adc* y *aod*.

106-115. Construir un círculo que
a) pase por tres puntos,
b) pase por dos puntos, y toque una recta,
c) pase por dos puntos, y toque un círculo,
d) pase por un punto, y toque dos rectas,
e) pase por un punto, y toque una recta y un círculo,
f) pase por un punto, y toque dos círculos,
g) toque tres rectas,
h) toque dos rectas y un círculo,
i) toque una recta y dos círculos,
j) toque tres círculos.

PROBLEMAS GRÁFICOS

RELATIVOS AL CAPÍTULO CUARTO.

El lugar geométrico del vértice de un triángulo que

a) con el triángulo *abc* tiene la misma base *ab* y la misma área, son dos rectas paralelas á la base,

b) con el paralelógramo *defg* tiene la misma base *de* y la misma área, son dos rectas paralelas á la base.

El lugar geométrico para los vértices del lado opuesto de un paralelógramo que

a) con el paralelógramo *hikl* tiene la misma base *hi* y la misma área, son dos rectas paralelas á la base,

b) con el triángulo *mno* tiene la misma base *mn* y la misma área, son dos rectas paralelas á la base.

El lugar geométrico del vértice de un triángulo sobre la recta *op* en que

a) la suma de los cuadrados de los otros dos lados es igual al cuadrado s^2, es una circunferencia,

b) la diferencia de los cuadrados de los otros dos lados es igual al cuadrado d^2, es una recta.

116-121. Transformar (*) un triángulo en otro, que tenga con el primero

a) la base comun, b) un lado comun, c) una altura comun,
d) una base dada, e) un lado dado, f) una altura dada.

122. Transformar un triángulo en otro, cuyo vértice esté en un punto dado de un lado ó de su prolongacion.

123. Transformar un triángulo en un rectángalo.

124. Transformar un paralelógramo en otro que tenga con el primero ángulos iguales, y un lado dado.

125. Transformar un rectángulo en un cuadrado.

126. Transformar un cuadrilátero en un triángulo.

127. Transformar un polígono en un triángulo.

128-129. Construir un cuadrado que sea igual
a) á la suma, b) á la diferencia de otros dos cuadrados.

130. Construir un cuadrado que sea *n* veces mayor que otro.

131. Trazar rectas por un vértice de un triángulo que lo divida en partes iguales.

132. Trazar rectas paralelas á un lado de un paralelógramo que lo divida en partes iguales.

(*) *Transformar* una figura en otra es construir una figura que con la primera tenga igual área, aunque diferente forma.

PROBLEMAS GRÁFICOS

RELATIVOS AL CAPÍTULO QUINTO.

133. Dividir un triángulo desde un punto de un lado en dos ó mas partes que tengan una razon dada.

134. Dividir un triángulo por medio de rectas que son paralelas á un lado, en dos ó mas partes iguales que tengan una razon dada.

135. Dividir un trapecio desde un vértice en dos ó mas partes que tengan una razon dada.

136. Dividir un trapecio desde un punto del perímetro en dos ó mas partes que tengan una razon dada.

137. Dividir un trapecio por medio de rectas que son paralelas á los lados paralelos, en dos ó mas partes que tengan una razon dada.

138. Dividir un cuadrilátero desde un punto dentro de él en tres ó mas partes que tengan una razon dada.

139. Dividir un círculo por medio de círculos concéntricos en dos ó mas partes que tengan una razon dada.

PROBLEMAS NUMÉRICOS

RELATIVOS AL CAPÍTULO SEXTO.

140. Determinar el área de un triángulo equilátero, dado el lado $= a$.

$$\tfrac{1}{4}\, a^2 \sqrt{3}$$

141. Determinar el área de un triángulo isósceles, dados la base $= a$, y un lado $= b$.

$$\tfrac{1}{4}\, a \sqrt{(2b + a) \,.\, (2b - a)}$$

142. Determinar el lado de un triángulo, dados los tres lados.

$$\sqrt{\frac{a + b + c}{2} \,.\, \frac{a + b - c}{2} \,.\, \frac{a - b + c}{2} \,.\, \frac{-a + b + c}{2}}$$

y poniendo $\dfrac{a + b + c}{2} = s$ tendremos

$$\sqrt{s\,(s - a) \,.\, (s - b) \,.\, (s - c)}$$

143. Determinar el área de un cuadrado, dada la diagonal d

$$\tfrac{1}{2}\, d^2$$

144. Determinar el área de un paralelógramo, dadas las diagonales $= d_1$ y d_2, y un lado $= a$.

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{(2a + d_1 + d_2) \,.\, (2a + d_1 - d_2) \,.\, (2a - d_1 \cancel{+ d} + d_2) \,.\, (-2a + d_1 + d_2)}$$

145. Determinar el área de un trapecio, dados la suma y diferencia de los lados paralelos $= s$, respectivamente $= d$, ademasla suma y diferencia de los lados no paralelos $= s_1$ resp. d_1

$$\frac{s}{4\,d}\sqrt{(s_1 + d)\,.\,(s_1 - d)\,.\,(d + d_1)\,.\,(d - d_1)}$$

146. Dadas las áreas de un polígono regular inscrito a, y circunscrito A de n lados; determinar las áreas del polígono regular inscrito ar, y circunscrito AR de $2\,n$ lados.

$$\sqrt{aA} \qquad \frac{2\,ar\,A}{A + ar}$$

147. Dados los lados de un triángulo a, b y c; hallar el radio del círculo circunscrito.

$$\frac{abc}{\sqrt{(a + b + c).\,(a + b - c).\,(a - b + c).\,(-a + b + c)}}$$

148. Dados los lados de un triángulo a, b y c; buscar el radio del círculo inscrito.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[a + b - c].\,[a - b + c].\,[-a + b + c].}{a + b + c}}$$

149. Dado el lado de un triángulo equilátero, cuadrado, y polígono regular de cinco lados $= a$; determinar el radio del círculo circunscrito.

$$\tfrac{1}{3}\,a\,\sqrt{3} \qquad \tfrac{1}{2}\,a\,\sqrt{2} \qquad \tfrac{1}{10}\,a\,\sqrt{10\,[5 + \sqrt{5}]}$$

150. Dado el lado de un triángulo equilátero, cuadrado, y polígono regular de cinco lados $= a$; buscar el radio del círculo inscrito.

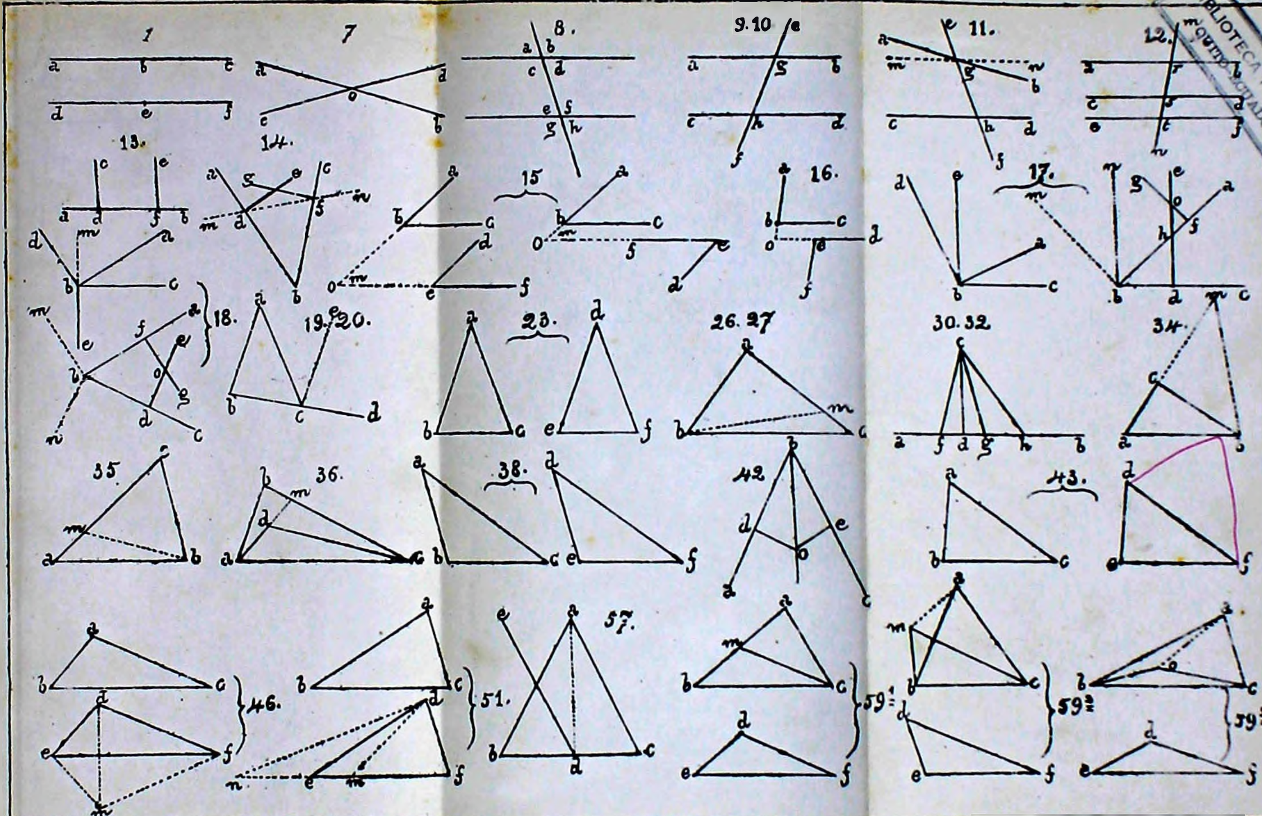
$$\tfrac{1}{6}\,a\,\sqrt{3} \qquad \tfrac{1}{2}\,a \qquad \tfrac{1}{10}\,a\,\sqrt{5\,[5 + 2\sqrt{5}]}$$

FIN

ERRATAS.

Fuera de las erratas manifiestas que se pueden corregir fácilmente por la atencion del lector, ponemos las siguientes:

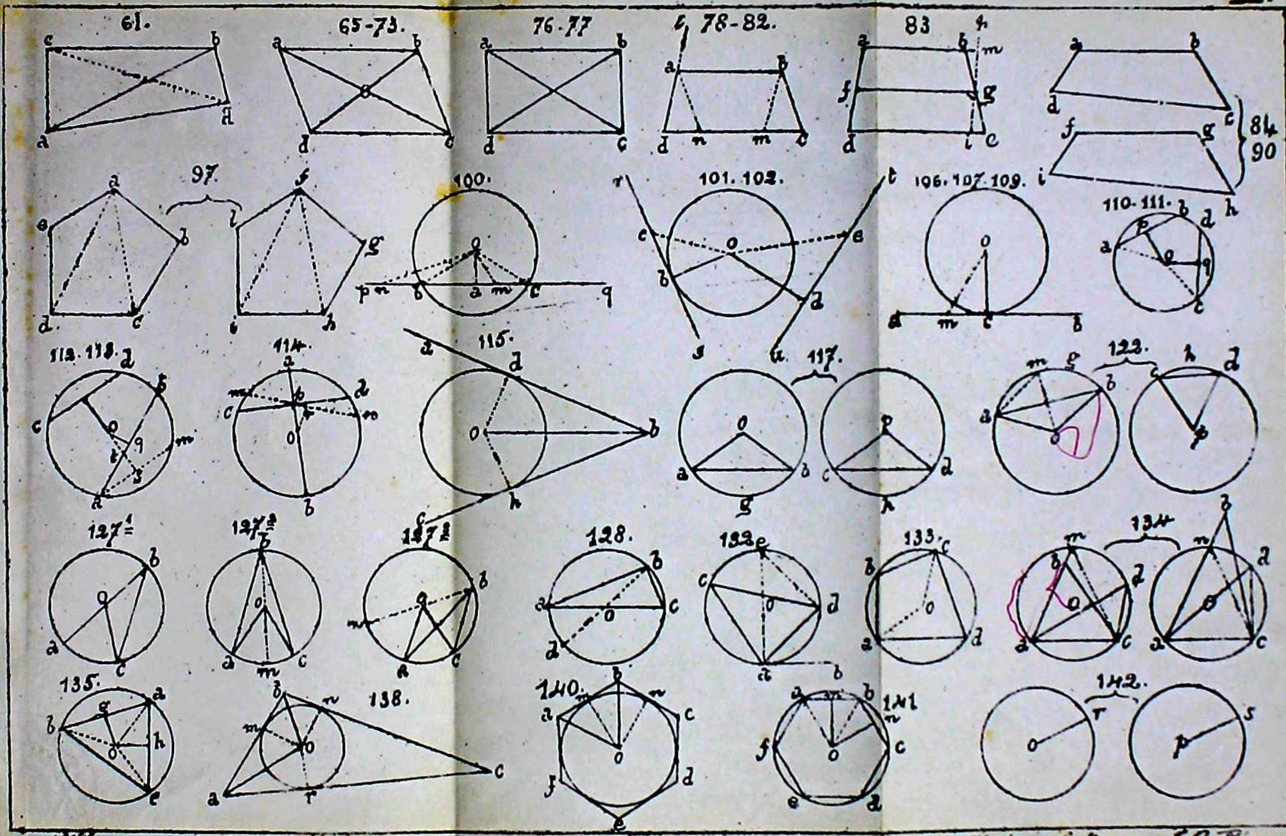
Página	Nº	Línea	Dice	Corríjase
9	17	5	*Caso* 1	*Caso preparatorio*
22	100	5 y 6	á lo ménos	á lo mas
28	153	4	1)	*Dem.* 1.)
38	178	9	*ab* = *ac*	*ab* : *ac*
39	183	3	*ac*	*bd*
40	183	3	*bd*	*ac*
42	202	7	(5)	(6)
44	214	11	—	borrando la proporcion
45	—	15	complementerias	complementarios
45	216	5	(72)	(68)
46	222	3	partes	partes externas
46	224	3	esta	aquella
48	235	10	*u*	”
59	—	8	de circunferencia	de la circunferencia
59	—	37	Cenlen	Ceulen



1877.

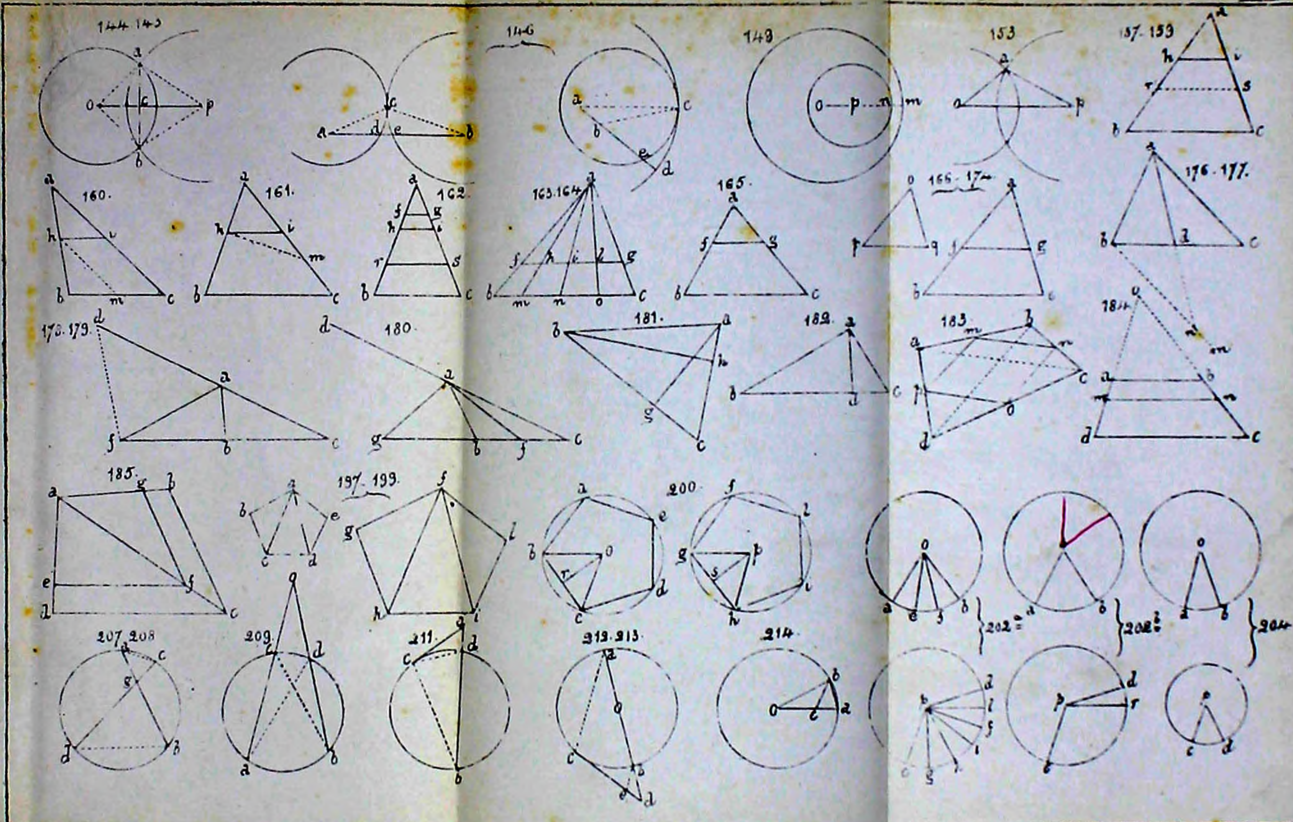
Autografiado por J. Gutiérrez

II.



Autografiado por J. G. Pérez.

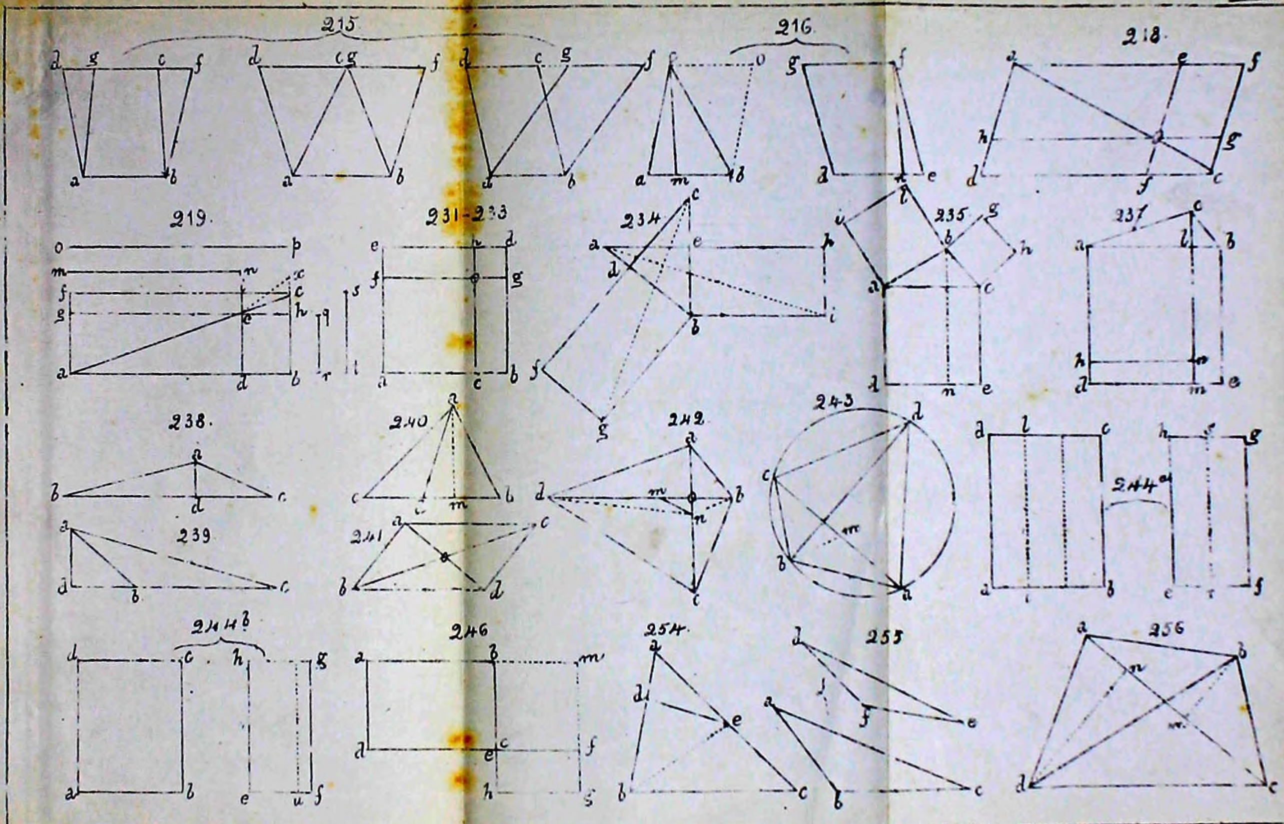
III



1877

Autografiado por J. J. [illegible]

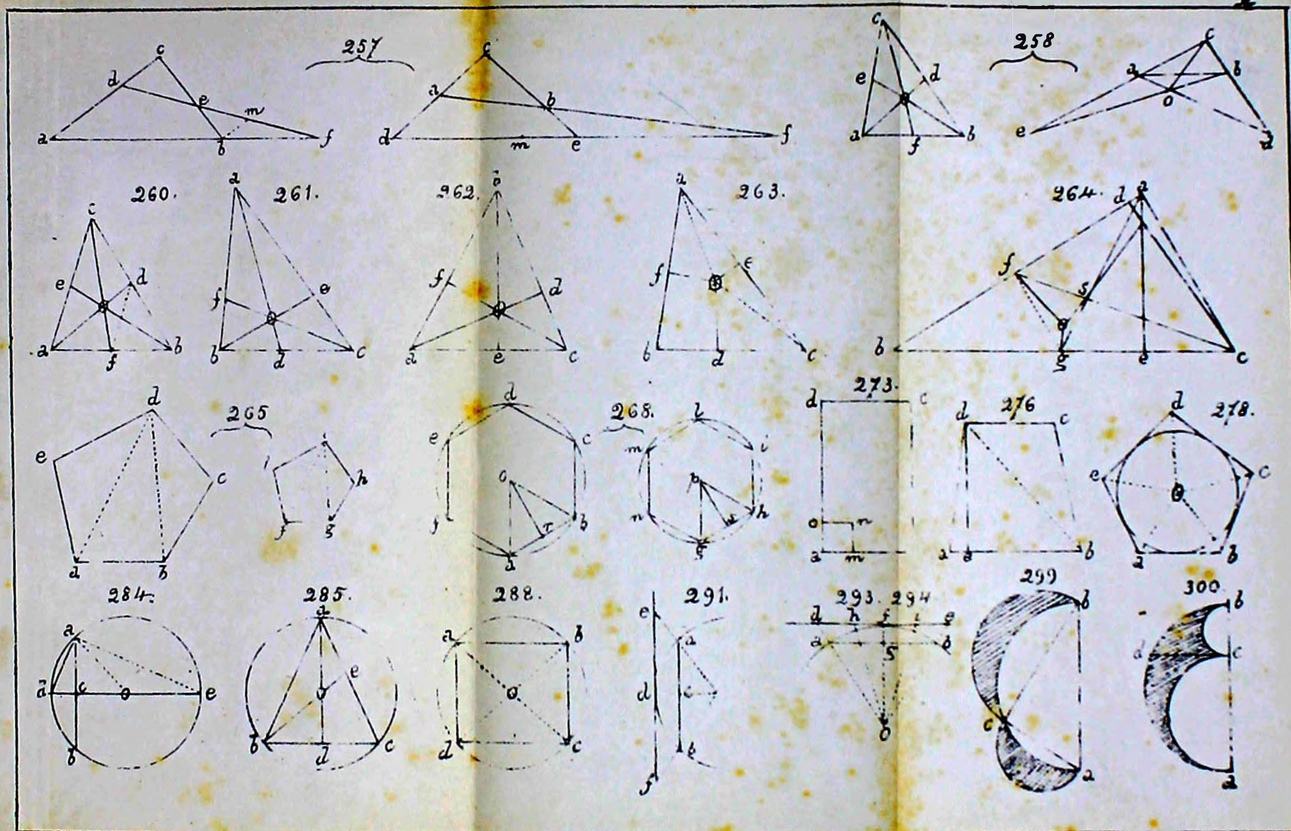
IV.



1877

Autografiado por J. G. Pérez

V


257
258
260.
261.
262.
263.
264.
265
268.
273.
276
278.
284.
285.
288.
291.
293. 294
299
300

1877

GEOMETRÍA PLANA

NEUMANN