www.flacsoandes.edu.ec

TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

POR

P. José Epping, S. J.

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA POLITÉCNICA
DE QUITO.

PARTE SEGUNDA.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

QUITO

IMPRENTA NACIONAL.

1874.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

FBN1200 2840-02

516
B644
Ej. 1
T. 2

ADVERTENCIA.

A lo dicho en el prólogo de la primera parte solo añadiré que los ejercicios prácticos de esta segunda no versan como allí sobre construcciones gráficas sino sobre problemas numéricos relativos á toda la Geometría, y á la teoría de las ecuaciones, y han sido tomados de una obra muy práctica compuesta por F Hoffmann.

Para que desde luego se puedan aplicar estos problemas conviene omitir en el primer paso:
del Cap. I, la esplicacion 7 del § 8, y los teoremas 27 y 28,
del Cap. II, los teoremas 3 y 20 y ademas todo el § 13,
del Cap. IV todo el § 17 y ademas los teoremas 19 y 20.

Todo lo cual puede tratarse en el segundo paso. A estos ejercicios pueden los profesores añadir otros muchos trigonométricos, por ejemplo, en el probl. 77 se puede preguntar ¿qué ángulo forma la altura con la arista, ¿qué inclinacion tiene una cara relativamente á la base?

Las citas á la Geometría plana se indican así: Pl. II, 3, lo que significa: Geomt. plana Cap. II, teor. 3.

El autor.
Epping

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

PARTE SEGUNDA.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

CAPITULO I.

Rectas y planos en el espacio, ángulos sólidos.

§ 1º CONSECUENCIAS DE LA DEFINICION DEL PLANO.

DEFINICION DEL PLANO. El plano es una superficie con la cual una recta que une dos cualesquiera de sus puntos coincide totalmente.

CONSECUENCIA 1ª. Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano estará situada toda en él, y por tanto puede cortarle solo en un punto, ademas á un plano se puede aplicar una recta en todos sentidos.

CONSECUENCIA 2ª Los planos ilimitados son congruentes, pues la extension de un plano es la mas sencilla de todas las superficies posibles, y la misma en todas sus partes.

CONSECUENCIA 3ª Por una recta pueden ponerse infinitos planos, pues el plano no está ligado á á una sola y determinada extension.

CONSECUENCIA 4ª Tres puntos que no están en una recta determinan solo un plano.

Expl. 1ª Dos cualesquiera de los tres puntos estarán en línea recta á la cual se podrá adaptar un plano; y como este es ilimitado, si le hacemos girar sobre dicha recta pasará necesariamente por el tercer punto y solo de una manera.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Expl. 2ª [fig. 1]. Siendo posibles dos planos por los tres puntos A, B, C se sigue que las tres rectas determinadas por A, B y C están situadas en estos dos planos, luego tambien cada recta que une dos puntos de ellas [definicion].

Esto supuesto demostraremos que cada punto de uno de los planos pertenece tambien al otro, y por tanto no tenemos dos planos distintos sino uno solo.

Siendo P un punto cualquiera de un plano tracemos por este una recta cualquiera, sea MN. Ahora bien, esta recta MN debe cortar al ménos á dos de estas rectas que están determinadas por los tres puntos A, B y C pues solo puede ser paralela á una de estas. Pero así tendrá dos puntos comunes con los dos planos, luego estará toda en ambos y por tanto tambien su punto P.

Consecuencia 5ª Una recta y un punto fuera de esta determinan un solo plano. [consec. 3ª]

Cosecuencia 6ª Dos rectas que se cortan determinan un solo plano [consec. 4ª]

Consecuencia 7ª Dos rectas paralelas determinan un solo plano.

Expl. Una de estas rectas y un punto de la otra determinan un solo plano [consec. 4ª], pero sabemos [Pl. § 2°, expl. 1ª cor. 1 y 2] que la paralela trazada á la recta por dicho punto será una sola y estará en el mismo plano en donde están la recta y el punto, luego como la recta y el punto de otra determina un solo plano, así las dos rectas paralelas.

Consecuencia 8ª La interseccion de dos planos es una recta.

Expl. Si hubieren tres puntos comunes no situados en una recta, no serian dos planos secantes sino un solo.

§ 2. LÍNEAS PARALELAS A UN PLANO.

Expl. Una recta se llama paralela á un plano si no puede cortarle.

Teor. 1. [fig. 2]. Toda recta paralela á otra situada en un plano fuera de la primera, es paralela á este plano.

Hip. AB ∦ CD.
Tes. AB ∦ NM.

Dem. El plano que determinan las paralelas CD y AB tendrá comun con el NM solo la recta CD, luego si la recta AB cortase al plano NM, lo haria en la recta CD [§ 1. consec. 1]. Pero esto es imposible, pues AB y CD son paralelas entre sí, luego la recta AB no puede cortar al plano NM y por tanto es paralela á él.

Cor. 1. Si de dos paralelas una corta á un plano, lo hará tambien la otra; pues haciendo pasar por las dos paralelas un plano, este cortará al otro en una recta que está cortada por una de las paralelas, luego tambien por la otra [Pl. I, 7].

Cor. 2. Si una de dos paralelas lo es á un plano lo será tambien la otra [cor 1].

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 2. Si por una recta paralela á un plano se traza otro cualquier, la interseccion será paralela á la recta primera.

Dem. La primera recta estando con la interseccion en el mismo plano, no puede cortarle pues en esta suposicion no seria paralela al primer plano.

Teor. 3. [fig. 3]. Si por cada una de dos rectas paralelas pasan dos planos secantes, la interseccioncomun será paralela á las dos rectas.

Hip. AB ‡ CD.
Tes. EF ‡ AB y EF ‡ CD.

Dem. parte 1ª AB ‡ CEFD [Teor. 1º] y EF es la interseccion comun entre los dos planos CF y AF luego será EF ‡ AB [Teor. 2].
Parte 2ª CD ‡ AEFB [Teor. 1] y EF es la interseccion comun entre los dos planos AF y CF, luego será CD ‡ EF [Teor. 2].

Teor. 4. [fig. 3]. Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.

Hip. AB ‡ EF, CD ‡ EF,
Tes. AB ‡ EF.

Dem. No estando las tres rectas en un mismo plano las paralelas AB y EF ademas las CD y EF determinarán dos planos secantes cuya interseccion es EF; haciendo pasar por CD y el punto G de la AB un nuevo plano, la interseccion de este con el EB será paralela á las paralelas CD y EF [Teor. 3]; pero por el punto G solo la AB puede ser paralela á la EF, luego necesariamente la AB será la interseccion y por tanto paralela á CD.

Cor. Si por dos rectas que se cortan en un plano se hacen pasar otros dos secantes, la interseccion de estos pasará por el punto comun de las dos rectas.
Dem. La interseccion de los dos planos no puede ser paralela al primer plano, pues seria paralela á las dos rectas [Teor. 2], y por tanto estas serian paralelas entre sí, lo que es contra el teor. luego la interseccion cortará al plano primero solo en un punto; pero este punto debe estar en cadaunade las rectas dadas, luego es el punto comun.

Teor. 5. [fig. 4.]. Una recta paralela á dos planos secantes, es tambien paralela á la interseccion de estos.

Dem. Haciendo pasar por un punto G de la interseccion AB y la recta dada CD un nuevo plano, tendremos en cada uno de los planos primeros una interseccion paralela á la recta dada [Teor. 2], pero estas intersecciones no son sino la recta AB, pues en otra suposicion serian al mismo tiempo entre sí paralelas [Teor. 4] y secantes por ser G un punto comun.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 6. [fig. 5]. Si los lados de dos ángulos que no están en el mismo plano, son paralelos entre sí, los ángulos serán iguales ó suplementarios.

Caso 1º Los lados son paralelos dos á dos en un mismo sentido.

Hip. $AM \ddagger A'M'$ y $AN \ddagger A'N'$.
Tes. $\sphericalangle MAN = M'A'N'$.

Dem. Tomando $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$ serán $ABB'A'$ y $ACC'A'$ dos paralelógramos.

luego $BB' \ddagger AA' \ddagger CC'$ ó iguales entre sí
de donde $BCC'B'$ un paralelógramo
luego $BC = B'C'$
" $\triangle BAC \cong B'A'C'$ [Pl. II, 9.]
por tanto $\sphericalangle BAC = B'A'C'$
ó $\sphericalangle MAN = M'A'N'$.

Caso 2º Los lados paralelos tienen sentidos opuestos.

Hip. $AM \ddagger A'Q$ y $AN \ddagger A'P$.
Tes. $\sphericalangle MAN = QA'P$.

Dem. $\sphericalangle MAN = M'A'N'$ [caso 1º]
ademas es $\sphericalangle M'A'N' = QA'P$
luego $\sphericalangle QA'P = MAN$.

Caso 3º Dos lados paralelos tienen el mismo sentido y los otros dos sentido contrario.

Hip. $AM \ddagger A'M'$ y $AN \ddagger A'P$.
Tes. $\sphericalangle MAN + M'A'P = 2R$.

Dem. $\sphericalangle MAN = M'A'N'$ [caso 1º]
ademas es $\sphericalangle M'A'N' + M'A'P = 2R$
luego $\sphericalangle MAN + M'A'P = 2R$.

§ 3. RECTAS PERPENDICULARES Y OBLICUAS A UN PLANO.

Explicaciones.

1ª Se llama pié de una recta relativamente á un plano el punto de interseccion.

2ª Una recta se dice perpendicular á un plano si lo es á todas las rectas tiradas por su pié en este plano.

3ª Una recta que corta á un plano es oblícua si no le es perpendicular.

Teor. 7. [fig. 6]. Si una recta es perpendicular á otras dos, que se cruzan por su pié en un plano, es perpendicular á este plano.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Hip. OP ⊥ OA, OP ⊥ OB, OA y OB están en el plano PQ.
Tes. PO ⊥ NQ.

Dem. Basta demostrar que OP es perpendicular á una recta cualquiera OC, que pasa por el pié O [Expl. 2].

Trazada la recta AB que corte á la OC en D, y prolongada PO sobre O hasta OP′=OP, tracemos las rectas AP, AP′, BP, BP′, DP y DP′ y serán:

	AP=AP′ y BP=BP′ [Pl. II, 14]
luego	△APB≅AP′B [Pl. II, 9]
de donde	∢DAP=DAP′
ademas es	AP=AP′ y AD=AD
luego	△DAP≅DAP′
„	DP=DP′ ó △PDP′ es isósceles
y por tanto	∢P′OD=POD=R [Pl. II, 13]
ó	PO ⊥ OC.

Cor. 1. Desde un punto fuera de un plano no se puede trazar mas que una perpendicular; pues en otra suposicion tendriamos, uniendo los pies, un triángulo de dos ángulos rectos.

Cor. 2. [fig. 7]. Desde un punto situado en un plano no se puede levantar mas que una perpendicular á este plano.

Dem. Supuesto que PA y PB fuesen perpendiculares al plano MN en el punto P, seria la interseccion del plano determinado por ∢APB en el MN perpendicular á AP y BP y ademas con estas en el mismo plano, es decir

∢CPB=R y CPA=R

ó ∢CPB=CPA lo que es absurdo, pues siendo en el mismo plano el uno será siempre mayor que el otro.

Cor. 3. La distancia desde un punto hasta un plano se determina por la perpendicular bajada desde dicho punto á este plano.

Dem. Toda otra recta tirada desde este punto al plano será hipotenusa de un triángulo rectángulo y por tanto mas larga que la perpendicular.

Cor. 4 [fig. 8]. Si se describe desde el pié de una perpendicular á un plano una circunferencia de un radio cualquiera, todas las oblícuas trazadas desde un mismo punto de la perpendicular á los de la circunferencia serán iguales.

Dem. Unido P con B y C será △BPA≅CPA por ser triángulos rectángulos y ademas PB=PC, luego será AB=AC.

Teor. 8. [fig. 9]. Si tres rectas, que se cortan en un mismo punto, tienen una perpendicular comun, estarán en un mismo plano.

Hip. AO, CO, BO son perpendiculares á OP.
Tes. AO, CO y BO están situados en un mismo plano.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Si OC no estuviera en el plano determinado por AO y OB, podriamos hacer pasar por OP y OC un nuevo plano, cuya interseccion con el primero fuese OC′ y por tanto tendriamos

$$OC' \perp OP \text{ y } OC \perp OP$$

luego $\sphericalangle C'OP = R = COP$ lo que es absurdo,
pues OC, OC′ y OP están en el mismo plano. [Constr.]

Cor. 1. Por un punto de una recta es posible solo un plano perpendicular, pues en otra suposicion se tendrá una contradiccion con el teor. demostrado.

Cor. 2. Haciendo girar un ángulo recto al rededor de uno de sus lados, el otro describirá un plano perpendicular al primero; pues el lado generador será siempre perpendicular al otro.

Teor. 9. [fig. 10]. Si una de dos paralelas es perpendicular á un plano, lo será la otra.

Hip. $AB \ddagger CD$ y $AB \perp MN$.
Tes. $CD \perp MN$.

Dem. Unidos los pies B y D tracemos por B una recta cualquiera, ademas $DF \ddagger BE$, de donde tenemos

$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDF$ [teor. 6]
pero $\sphericalangle ABE = R$ [hip.]
luego $\sphericalangle CDF = R$
ó $FD \perp CD$, ya es $BD \perp CD$ por ser $CD \ddagger AB$ [hip.]
luego $CD \perp MN$ [teor. 7].

Cor. 1. [fig. 10]. Dos rectas AB y CD perpendiculares á un plano MN serán paralelas entre sí; pues trazando por D una paralela á AB será perpendicular á MN [teor. 9] y la única [teor. 7 cor. 2] luego es cabalmente la CD.

Expl. [fig. 11]. La proyeccion de la recta limitada AB sobre el plano MN es la recta CD, que resulta bajando desde los puntos A y B perpendiculares á dicho plano; luego para la recta EF, que tiene el punto E comun con el plano será EG la proyeccion sobre él, siendo $FG \perp MN$.

Cor. Luego AB y CD están en el mismo plano determinado por las paralelas AC y BD.

Teor. 10. [fig. 12]. El ángulo, que forman entre sí una recta oblícua y su proyeccion sobre el plano es menor que el que dicha recta forma con las demas que salen de su pié.

Hip. $BC \perp MN$ ó AC es la proyeccion de AB.
Tes. $\sphericalangle BAC < BAM$.

Dem. Siendo AM una recta cualquiera que sale del pié de la recta oblícua AB, fórmese AD=AC y unido D con B tenemos

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

$BD > BC$ [teor. 7, cor. 3]
luego $\sphericalangle BAD > BAC$ [Pl. II, 12].

Cor. 1. La recta de un plano que forma el menor ángulo con una oblícua, es la proyeccion de esta, pues si no fuese así no podria formar el menor ángulo.

Cor. 2. Dicho ángulo se llama la inclinacion de la oblícua al plano.

Teor. 11. [fig. 13] Si una recta de un plano es perpendicular á otra oblícua al plano, es tambien perpendicular á la proyeccion de la oblícua sobre él.

Hip. $BD \perp AB$ y BC la proyeccion de AB.
Tes. $DB \perp CB$.

Dem. Trazando $BE \ddagger CA$ será $EB \perp MN$ [teor. 9] luego es BD perpendicular al plano EBCAE por ser perpendicular á AB y BE [hip. y constr.] de donde $BD \perp CB$ por ser CB una recta de dicho plano.

§ 4. PROBLEMAS.

Expl. Los postulados que se suponen en la geometría del espacio son los siguientes:

1º Por un punto ó una recta hacer pasar un plano cualquier.

2º Por tres puntos que no están en una recta ó por sus equivalentes hacer pasar un plano determinado.

Probl. 1º Tirar por un punto fuera de un plano una recta paralela á él.

Constr. Trácese por dicho punto un plano que corte al dado y trácese por el punto dado á la intersección de los planos una paralela á esta, y esta será la pedida.

Dem. Teor. 1.

Probl. 2º Hacer pasar por un punto de una recta un plano que le sea perpendicular.

Constr. Trácense [fig. 14] por AB dos planos cualesquiera, despues levántese desde el punto P en cada plano una perpendicular á la recta dada y será el plano CPD el pedido.

Dem. Teor. 7.

Probl. 3º Hacer pasar por un punto fuera de una recta un plano perpendicular á esta.

Constr. Trácese por la recta y el punto un plano, despues bájese desde el punto dado, una perpendicular á la recta y estará el problema reducido al 2º

Probl. 4º Desde un punto dado fuera de un plano bajar á este una recta que le sea perpendicular.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Constr. [fig. 15]. Siendo A el punto y MN el plano dado, tírese en el plano una recta cualquiera BC, y hecho pasar por BC y A un plano bájese AE $\perp$ BC, despues levantando EF $\perp$ BC, trácese AG perpendicular á EF y será AG $\perp$ MN.

Dem. Trazada GK paralela á EC tenemos

EC $\perp$ al plano AEG

luego GK $\perp$ al plano AEG

de donde GK $\perp$ AG

luego AG perpendicular á GK y á GE (constr.) y por tanto al plano MN (teor. 7)

Probl. 5. desde un punto dado de un plano levantar una recta perpendicular á este.

Constr. Trazada desde un punto fuera del plano una perpendicular á él tírese por el punto dado una paralela á la recta trazada y será la perpendicular pedida.

Dem. Teor. 9.

Probl. 6. [fig. 16] Desde un punto A fuera de un plano MN tarzar por este una recta que forme el ángulo α con el plano.

Constr. Trazada AB $\perp$ MN tírese por B una recta cualquiera BC, despues fòrmese en el plano CBA y en el punto A el ángulo BAD=R—α y será $\sphericalangle$ADB=α.

Dem. Es fácil.

§ 5. PLANOS PARALELOS.

Expl. Dos planos son paralelos si no se encuentran por mas que se prolonguen.

Teor 12. Dos rectas secantes y paralelas á un plano determinan un plano paralelo al otro.

Dem. Si los dos planos se cortasen seria la interseccion comun paralela á las dos rectas secantes [teor. 2], lo que es contra el teor. 4.

Cor. Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos están situados en un mismo plano ò forman planos paralelos.

Teor. 13. Si dos planos paralelos están cortados por un tercero, las interseciones son paralelas.

Demost. Las intersecciones están en el mismo plano, ademas no pueden encontrarse pues no lo pueden los planos, luego estas son paralelas.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. 1. La recta que se encuentra con uno de dos planos paralelos, se encontrará tambien con el otro.

Dem. Por dicha recta y un punto cualquiera del otro plano se puede hacer pasar un plano, que formará dos intersecciones paralelas con los dos planos; ahora bien, la recta cortará á una de estas intersecciones paralelas, luego tambien á la otra y por tanto se encontrará con los dos planos paralelos.

Cor 2. El plano que corta á uno de dos paralelos cortará tambien al otro.

Dem. En dicho plano puede trazarse una recta que corte á uno de los planos paralelos, luego cortará al otro [cor. 1]; pero esto solo es posible si su plano encuentra los dos paralelos.

Cor. 3. Dos planos M y N paralelos á un tercero Q son paralelos entre sí; pues si M encontrase á N deberia encontrar á Q [cor. 2] lo que es contra la hipótesis.

Teor. 14. [fig. 18]. Rectas paralelas limitadas por dos planos paralelos son iguales.

Hip. MN ‡ PQ y AB ‡ CD.
Tes. AB = CD.

Dem. Uniendo A con C y B con D serán las rectas AC y BD las intersecciones del plano determinado por las paralelas, y por tanto

AC ‡ BD [teor. 13] ademas es AB ‡ CD
luego ABCD un paralelógramo y por tanto AB = CD.

Teor. 15. (fig. 19). La recta perpendicular á uno de dos planos paralelos lo será al otro.

Hip. PQ ‡ MN y A′A ⊥ MN.
Tes. AA′ ⊥ PQ.

Dem. Siendo A y A′ los piés en los planos respectivos háganse pasar por AA′ dos planos distintos cuyas intersecciones respectivas en los planos PQ y MN sean

AB y A′B′, AC y A′C′, de donde tenemos

AB ‡ A′B′ y AC ‡ A′C′
pero es A′A ⊥ AB y A′A ⊥ AC
luego A′A ⊥ A′B′ y A′A ⊥ A′C′
" A′A ⊥ PQ [teor. 7].

Cor. 1. Dos planos perpendiculares á una recta son paralelos entre sí.

Dem. Siendo en la fig. 19 AA′ perpendicular á MN y PQ ademas, A y A′ los piés de la recta, se podria, si los planos no fuesen paralelos, imaginar por A′ un plano paralelo á MN, el cual seria perpendicular á AA′ [teor. 15], luego habrian dos planos perpendiculares á AA′ en el punto A′ lo que es contra el teor. 8, cor. 1.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. 2. Dos planos paralelos equidistan en todas sus partes, pues las perpendiculares serán paralelas é iguales.

Cor. 3. Luego la perpendicular entre dos planos paralelos mide su distancia, pues toda otra recta es mayor.

Teor. 16. (fig. 20). Tres planos paralelos que cortan á dos rectas cualesquiera, las cortan en partes proporcionales.

Hip. MN ‡ PQ ‡ RS.
Tes. AE:EC=BG:GD.

Dem. Siendo C, E, A y D, G, B los piés en los planos respectivos unamos el punto B con C; siendo F es el punto de interseccion con PQ, CD y FG serán las intersecciones del plano CDB, AB y EF las del ABC; de donde se sigue

AB ‡ EF y CD ‡ FG (teor. 13)
luego CE:EA=CF:FB=DG:GB
„ CE:EA=DG:GB
ó AE:EC=BG:GD.

Teor. 17. (fig. 21). Una recta oblícua que corta á dos planos paralelos, tendrá la misma inclinacion con respecto á estos.

Dem. Siendo AB la recta y C y D los piés, bajemos desde A una perpendicular á los planos paralelos, cuyos piés sean F y E; uniendo E con D y F con C serán ED y FC las intersecciones del plano DEA con los paralelos, de donde se sigue

DE ‡ CF [teor. 13] luego ∢ACF=ADE,

ya sabemos que dichos ángulos determinan las inclinaciones á los planos paralelos (teor. 10, cor. 2), luego las inclinaciones son las mismas.

§ 6. PLANOS SECANTES Ó ÁNGULOS DIEDROS.

Explicaciones.

1ª Si dos planos se cortan forman un ángulo que se llama *ángulo diedro*, los planos se dicen *caras* y la interseccion *arista;* [fig. 22] MABN es un ángulo diedro.

2ª Los ángulos diedros son adyacentes si tienen una cara comun y las otras en el mismo plano; [fig. 22] MABN y MABQ son ángulos diedros adyacentes.

3ª Son ángulos diedros opuestos por la arista los que tienen la arista comun y sus caras respectivas opuestas pero en el mismo plano; [fig. 22] MABN y PBAQ son ángulos diedros opuestos por la arista.

4ª Los ángulos diedros son iguales si pueden coincidir.

5ª Se llama ángulo rectilíneo de un diedro el formado por dos perpendiculares trazadas desde un mismo punto de la arista y situadas en las dos caras; [fig. 22] el ángulo COD es el ángulo rectilíneo del diedro MABN.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. 1. El plano que está determinado por el ángulo rectilíneo de un diedro es perpendicular á la arista [teor. 7].

Cor. 2. Todos los ángulos rectilíneos del mismo diedro son iguales, pues sus lados son respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Cor. 3. Ángulos diedros iguales tienen los ángulos rectilíneos iguales, pues coincidiendo los primeros lo harán los segundos.

Teor. 18. [fig. 23]. Dos ángulos diedros son iguuales si lo son sus rectilíneos.

Hip. $\sphericalangle$COD=C′O′D′.
Tes. $\sphericalangle$MABP=M′A′B′P′.

Dem. Colocando O′ sobre O de manera que O′C′ esté en la direccion de OC y O′D′ en la de OD seguirá O′A′ la direccion de OA, pues O′A′ es perpendicular á C′O′D′ y lo mismo es OA relativamente á COD; ahora bien, el plano C′O′A′ está situado en el COA, es decir el plano M′B′A′ está situado en el MBA, ademas el plano D′O′A′ está situado en el DOA, á saber, el plano P′B′A′ está situado en el PBA y por tanto el $\sphericalangle$P′B′A′M′ coincide con PBAM, luego dichos ángulos son iguales.

Cor. 1. Si dos ángulos adyacentes son iguales, lo son sus rectilíneos, é inversamente si dos ángulos diedros adyacentes tienen sus rectilíneos iguales, son tambien iguales dichos diedros.
La parte 1ª se sigue de cor. 3 de la expl. 5ª
La parte 2ª es una consecuencia del teor. demostrado.

Expl. Un ángulo diedro se llama recto si su ángulo rectilíneo lo es; luego por la misma analogía la suma de dos ángulos diedros adyacentes es igual á dos rectos ó son suplementarios.

Cor. 2. Dos ángulos diedros opuestos por la arista son iguales, pues lo son sus ángulos rectilíneos.

Cor. 3. Si dos ángulos diedros exteriores uno á otro tienen la arista y una cara comun y forman juntos dos rectos, las otras dos caras están en el mismo plano.

Dem. Trazados en el mismo punto de la arista los ángulos rectilíneos, estos serán por hipótesis suplementarios, luego los lados estremos están en la misma recta y por tanto en el mismo plano con la arista; pero sabemos que la arista y el lado del ángulo rectilíneo determinan el plano de la cara correspondiente y por tanto si los dos lados exteriores de los ángulos rectilíneos están en el mismo plano con la arista, lo estarán tambien las caras correspondientes; en el caso propuesto los lados exteriores de los ángulos rectilíneos están en el mismo plano con la arista, luego valdrá lo mismo de las caras exteriores.

Cor. 4. Dividiendo un ángulo rectilíneo en partes iguales y haciendo pasar por la arista y cada lado de los ángulos iguales planos, quedará dividido el ángulo diedro en partes iguales.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Los ángulos planos son los rectilíneos para los diedros, pues todos los lados son perpendiculares á la arista; pero estos son por hipótesis iguales, luego lo serán tambien los diedros correspondientes.

Teor. 19. [fig. 24 y 25]. Dos ángulos diedros son proporcionales á sus rectilíneos.

Hip. $\sphericalangle$DAC es el rectilíneo de DABC
$\sphericalangle$D′A′C′ es el rectilíneo de D′A′B′C′.
Tes. $\sphericalangle$DABC:D′A′B′C′=$\sphericalangle$DAC:D′A′C′.

Caso 1º [fig. 24]. Sean los rectilíneos conmensurables.

Dem. Siendo $\sphericalangle$CAE=C′A′G medida comun de los dos ángulos DAC y D′A′C′ de modo que

$$\sphericalangle DAC=n\ [3]\ CAE \text{ y } \sphericalangle D'A'C'=n'\ [5]\ C'A'G$$

será la razon: $\sphericalangle DAC:D'A'C'=\frac{n}{n'}\left(=\frac{3}{5}\right)$.

Ahora hagamos pasar planos por las rectas divisorias de los ángulos rectilíneos y por las aristas correspondientes, y quedarán divididos igualmente los ángulos diedros [teor. 18 cor. 4], de donde tenemos

$$\sphericalangle DABC=n\ [3]\ EABC \text{ y } \sphericalangle D'A'B'C'=n'\ [5]\ GA'B'C'$$

luego de la razon: $\sphericalangle DABC:D'A'B'C'=\frac{n}{n'}\left(\frac{3}{5}\right)$

comparada con la encontrada arriba se sigue

$$\sphericalangle DABC:D'A'B'C'=\sphericalangle DAC:D'A'C'$$

Caso 2º [fig. 25] $\sphericalangle$DAC y D′A′C′ son inconmensurables:

1º Estando el ángulo DAC dividido en partes iguales tan pequeñas como se quiera, pongamos una de estas partes como medida sobre el ángulo C′A′D′ y no podrá la última recta de la division AP′ coincidir con A′D′, por ser inconmensurables los ángulos DAC y D′A′C′; haciendo pasar ahora por A′P y la arista A′B′ un plano será

$$\sphericalangle DAC:P'A'C'=\sphericalangle DABC:PA'B'C'$$

2º Podemos hacer que la recta A′P se aproxime mas y mas á A′D′ tomando las partes iguales del $\sphericalangle$DAC succesivamente mas pequeñas, por eso el límite del $\sphericalangle$AP′C′ será D′A′C′ ó bien:

el lim. de la razon [$\sphericalangle$DAC:PA′C′]=$\sphericalangle$DAC:D′A′C′;

por consiguiente se aproximará mas y mas el plano PA′B al plano D′A′B′ ó el lím. del $\sphericalangle$PA′B′C′ será D′A′B′C′ ó bien

el lím. de la razon [DABC:PA′B′C′]=DABC:D′A′B′C′.

Ahora bien, aplicando el teorema de los límites [Pl. § 24, 3] tendremos $\sphericalangle$DAC:D′A′C′=DABC:D′A′B′C′.

Teor. 20 [fig. 26]. Si un plano corta á dos planos paralelos los ángulos diedros correspondientes son iguales.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Hip. MN ǂ RP ademas
∢QCDN y QABP son ángulos correspondientes.
Tes. ∢QCDN=QABP.

Dem. Levantemos EJ ⊥ AB que corte á la interseccion CD en F y será FJ ⊥ CD por ser CD ǂ AB [teor. 13], ademas trazada EG ⊥ AB hagamos pasar por EG y EJ un plano que corte MN en la recta FH, que será paralela á EG [teor. 13] de donde se sigue que HF ⊥ DC [teor. 6].

Ahora bien ∢GEJ es el rectilíneo del diedro QABP
y ∢HFJ.......................... QCDN
pero sabemos que ∢GEJ=HFJ por ser EG ǂ FH
luego el diedro QABP=QCDN.

Cor. En la misma suposicion serán iguales los diedros alternos y la suma de los opuestos es igual á 2R, pues lo son los ángulos rectilíneos correspondientes.

Nota. El teorema recíproco será cierto con tal que las intersecciones sean paralelas.

§ 7. PLANOS PERPENDICULARES.

Expl. Dos planos son perpendiculares entre sí si forman un ángulo diedro igual á un recto.

Teor. 21. [fig. 27]. Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pasa por dicha recta es perpendicular al primero.

Hip. BA ⊥ MN.
Tes. SP ⊥ MN.

Dem. Siendo CD la interseccion de PS y MN, tracemos en el plano MN la recta AE ⊥ CD y será
∢EAB=R [ter. 7]
ademas es ∢EAB el rectilíneo de PSCDN
luego ∢PSCDN=R
ó PS ⊥ MN.

Cor. 1. Si los dos planos [fig. 27] MN y SP son perpendiculares entre sí, y la recta BA del plano PS lo es á la interseccion comun CD, esta será perpendicular al plano MN.

Dem. Siendo la recta AE del plano MN perpendicular á CD tenemos ∢BAE=R (hip.) luego es BA perpendicular á AE y ya es por hip. á CD y por tanto lo es al plano MN (teor. 7).

De donde se ve que la recta levantada en el punto A perpendicular á MN es cabalmente la recta AB [toor. 7, cor. 72].

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. 2. Si dos planos son perpendiculares entre sí, la recta bajada desde un punto cualquier de un plano perpendicularmente al otro, estará situada toda en el primer plano; pues en otra suposicion se podria bajar desde el mismo punto una perpendicular á la arista y tendriamos (segun cor. 1) dos rectas secantes y perpendiculares al mismo plano, lo que es contra el teor. 7 cor. 1.

Cor. 3. Si nna recta y un plano son perpendiculares á un otro, son paralelas entre sí, pues si se cortasen lo seria contra cor. 2.

Cor. 4. Dada en un plano una recta no puede pasar por esta sino un plano perpendicular al primero; pues (fig. 27); siendo SP perpendicular á MN, todo otro plano que pase por CD formará con MN un ángulo rectilíneo mayor ó menor que un recto.

Cor. 5. El plano de un ángulo rectilíneo de un diedro es perpendicular á las caras; pues lo es á la arista: de donde se saca que la proyeccion de un lado del rectilíneo sobre la otra cara coincide con el otro lado del mismo ángulo.

Teor. 22. [fig. 28] Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la interseccion de los primeros es perpendicular á este.

Hip. SR $\perp$ MN y PQ $\perp$ MN.
Tes. BA $\perp$ MN.

Dem. La perpendicular en A al plano MN debe estar en el plano RS y PQ (teor. 21, cor. 1), luego esta es la recta comun, á saber la interseccion.

Cor. 1. Tres planos perpendiculares entre sí forman intersecciones perpendiculares.

Dem. [fig. 29a].

Q y R son $\perp$ á P luego DA $\perp$ á AB y AC
Q y P son $\perp$ á R luego BA $\perp$ á AD y AC
R y P son $\perp$ á Q luego CA $\perp$ á AB y AD.

Cor. 2. Si tres rectas son perpendiculares entre sí, los planos que determina lo serán tambien. Se demuestra por el teor. 7 y 21.

Cor. 3. Bajando [fig. 29b], desde un punto C fuera de dos planos secantes M y N dos perpendiculares á ellos CE y CD, el plano así determinado CEFD es perpendicular á la arista AB, pues dicho plano lo es á los secantes [teor. 21]; ademas de donde se saca que $\sphericalangle$EFD es el rectilíneo del diedro MABN.

Teor. 23. [fig. 30]. Todo plano perpendicular á uno de dos planos paralelos lo será tambien al otro.

Hip. MN $\nparallel$ PQ y RS $\perp$ PQ.
Tes. RS $\perp$ MN.

Dem. En el punto E de la interseccion CD tracemos EF perpendicular á esta en el plano RS, que será tambien perpendicular á PQ [teor. 21 cor. 1]

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

luego EF ⊥ MN [teor. 15]
y por tanto RS ⊥ MN [teor. 21].

Nota. El teor. 23 es una consecuencia inmediata del teor. 20.

§ 8. ÁNGULOS SÓLIDOS, EN ESPECIAL DE LOS TRIEDROS.

Explicaciones.

1ª Si tres ó mas planos concurren en un mismo punto y cada dos tienen una arista comun, forman un ángulo sólido ò poliedro; si los planos concurrentes son tres, el ángulo se llama triedro.

El punto comun A [fig. 31] es el *vértice*, los planos BAC, CAD &a. se llaman *caras* y son siempre ángulos planos, las intersecciones de los planos *aristas*. Un plano que pase por dos aristas es un *plano diagonal*, y por tanto todo ángulo poliedro con *n* caras puede descomponerse en [n—2] triedros.

2ª Tratamos solo de poliedros convexos, es decir, tal que las intersecciones de todas sus caras con un plano secante forman un polígono convexo.

3ª Los elementos de un ángulo poliedro son los diedros y ángulos planos.

4ª Cuando en dos ángulos poliedros los elementos son iguales y ademas la coordenacion de estos es la misma, estos son *congruentes ó idénticos;* si la coordenacion es cabalmente inversa, se llaman *simétricos.*

Si sobre un mismo plano colocamos [fig. 32] dos caras análogas ABC y A′B′C′ y los poliedros en la posicion que indica la figura, los elementos todos del 1° están cabalmente colocados en órden inverso de los del 2°; luego serán simétricos.

5° Para formar, por ejemplo, un ángulo triedro simétrico á otro dado, basta prolongar las aristas sobre el vértice y resultará un triedro simétrico al primero, que es al mismo tiempo el opuesto por el vértice al 1°

[fig. 32] Los dos ángulos triedros ABCD y AB′C′D′ tienen todas sus partes iguales, sinembargo no pueden coincidir; colocando el ángulo B′AC′ sobre BAC caerá la arista AD′ al lado opuesto de AD ó si al mismo lado no puede coincidir con ella, como lo manifiesta la figura.

6° Dos ángulos sólidos que tienen el mismo número de caras son suplementarios si los ángulos planos del uno son suplementarios de los ángulos diedros correspondientes del otro; estos se llaman tambien ángulos sólidos polares.

7° Para construir un ángulo sólido suplementario de otro por ej. un triedro sirve el método siguiente.

Siendo [fig. 33] O el vértice del triedro dado, tomemos un punto P dentro de él y bajemos las tres perpendiculares PD ⊥ BOA, PE ⊥ BOC y PF ⊥ AOC y tendremos un triedro P suplementario de O.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Trazando por EPD un plano que corte á la cara COB en EG y la AOB en DG tendremos

$PEGD \perp GOCE$ por ser $PE \perp COB$
$PEGD \perp GOAD$ por ser $PD \perp AOB$
luego $OG \perp PEGD$ [teor. 22]
de donde $EG \perp OG$ y $DG \perp OG$
ó el $\sphericalangle EGD$ es el rectilíneo de AOGC
pero $\sphericalangle PEG=R$ y $\sphericalangle PDG=R$
luego $\sphericalangle EGD+DPE=2R$
ó $\sphericalangle AOGC+DPE=2R$

luego un ángulo plano en P es el suplementario de un ángulo diedro en O.

De la misma manera se demuestra de los otros ángulos.

Ademas hemos visto que la arista OB del ángulo O es perpendicular á la cara EPD del $\sphericalangle$P, lo que tiene lugar tambien relativamente á las otras partes, y por tanto las caras y las aristas en los dos ángulos triedros O y P son recíprocamente perpendiculares entre sí; de donde se sigue que los ángulos diedros y planos en dichos triedros son recíprocamente suplementarios, y por tanto los ángulos sólidos O y P son suplementarios.

Teor. 24. [fig. 34]. En todo ángulo triedro la suma de dos ángulos planos es mayor que el tercero.

Tes. $\sphericalangle AOB+BOC>\sphericalangle AOC.$

Dem. Formando en el plano COA un $\sphericalangle FOD=FOB$ tómese $OE=OD$ y hágase pasar por E y D un plano secante á las tres caras del ángulo triedro y tendrà lugar

$\triangle EOF\cong DOF$ [Pl. II 7]
luego $EF=DF$ de donde $EG>GD$
" $\sphericalangle EOG>DOG$ [Pl. II 12]
" $\sphericalangle EOG+EOF>DOG+DOF$
ó $\sphericalangle AOB+BOC>AOC.$

Cor. La diferencia entre dos ángulos planos es menor que el tercer ángulo.

Dem. Siendo α, β, γ los tres ángulos planos, tenemos: $\alpha+\beta>\gamma$ y por consiguiente $\alpha>\gamma-\beta$.

Teor. 25. [fig. 35]. La suma de todos los ángulos planos de un poliedro es menor que cuatro rectos.

Dem. Haciendo pasar por las caras un plano secante resultará un polígono que tiene tantos lados cuantas caras tiene el poliedro. En los vértices A, B, C &a. tenemos ángulos triedros, en los cuales dos ángulos planos pertenecen á las caras del ángulo poliedro, y el tercero

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

al polígono secante, luego será $\sphericalangle BAP + EAP > BAE$, &a.

Denotando por S la suma de los ángulos del polígono y por S′ la suma de los otros ángulos al rededor de los vértices A, B, &a. se sigue que $S' > S$.

Ahora bien, uniendo un punto O del polígono con los vértices tenemos en el polígono tantos triángulos, cuantos forman las caras del poliedro, luego tenemos siendo *s* la suma de los ángulos planos al vértice P

$$S' + s = S + 4R$$
$$S' > S$$
luego
$$s < 4R$$

Teor. 26. La suma de los ángulos diedros de un poliedro con *n* caras es menor que $2n.R$ y mayor que $2nR - 4R$.

Dem. Supongamos ya formado el poliedro suplementario y sea S la suma de los ángulos diedros del dado y s la de los planos del suplementario y tendremos:

$$S + s = 2n.R$$
luego
$$S < 2nR$$
y por ser $S = 2n.R - s$ en donde $s < 4R$ [teor. 25]
será
$$S > 2nR - 4R$$

Cor. Luego en un triedro

$$S < 6R \text{ y } S > 2R.$$

Teor. 27. [fig. 36]. En un triedro se oponen

1º á los ángulos planos iguales diedros iguales,
2º á los diedros iguales ángulos planos iguales,
3º á mayor ángulo plano mayor diedro,
4º á mayor diedro mayor ángulo plano.

Constr. Para las cuatro partes. Bajemos desde un punto cualquiera de OB una perpendicular DG al plano COA; ademas tracemos $DE \perp OC$ y $DF \perp OA$ y uniendo E y F con G serán $GF \perp OA$ y $GE \perp OC$ [teor. 11]

luego $\sphericalangle GFD$ es el ángulo rectilíneo del diedro CFOD
y $\sphericalangle GED$ es.................................AEOD

Para la parte 1ª

Hip. $\sphericalangle BOA = BOC$
Tes. $\sphericalangle DEOA = DFOC$

Dem. $\triangle DFO \cong DEO$ [Pl. II, 8 cor.]
luego $DF = DE$
" $\triangle DGF \cong DGE$ [Pl. II, 9 cor.]
y por tanto $\sphericalangle DFG = DEG$
ó $\sphericalangle CFOD = AEOD$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Para la parte 2ª
Hip. $\sphericalangle$DCOA=DAOC
Tes. $\sphericalangle$BOA=BOC.

Dem. $\triangle$DGF$\cong$DGE por ser $\sphericalangle$DFG=DEG [hip.]
luego DF=DE
de donde $\triangle$DFO$\cong$DEO por ser $\sphericalangle$DFO=DEO=R
y por tanto $\sphericalangle$BOA=BOC.

Nota. Para las otras dos partes se requieren los dos teoremas cuya verdad se manifiesta fácilmente.

1° Si dos triángulos rectángulos tienen solo la hipotenusa comun, el cateto se opone mayor al mayor ángulo agudo é inversamente. [Por medio de Pl. IV 19].

2° Si dos triángulos rectángulos tienen un cateto comun y desiguales las hipotenusas, será la mayor la que forme con el otro cateto menor ángulo é inversamente. [Por medio de construc.]

Para la parte 3ª

Hip. $\sphericalangle$BOA>BOC.
Tes. $\sphericalangle$DOCA>DOAC

Dem. DF>DE por ser $\sphericalangle$DOF>DOE [hip.]
luego $\sphericalangle$DEG>DFG
ó $\sphericalangle$DOCA>DOAC

Para la parte 4ª

Hip. DOCA>DOAC.
Tes. BOA>BOC.

Dem. $\sphericalangle$DEG>DFG [hip.]
luego DF>DE
" $\sphericalangle$DOF>DOE
" $\sphericalangle$BOA>BOC.

Teor. 28. [fig. 37]. Dos triángulos triedros son congruentes si tienen respectivamente iguales y en el mismo sentido:

1° dos ángulos planos y el diedro comprendido,
2° dos ángulos diedros y el plano comprendido,
3° tres ángulos planos,
4° tres ángulos diedros.

Dem. El 1° y 2° caso se demuestran como en la geometría plana.

Para 3°
Hip. AOB=A′O′B′, BOC=B′O′C′, COA=C′O′A′.
Tes. O$\cong$O′.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Formando

$$OD=OE=OF=O'D'=O'E'=O'F'$$

ademas trazando la OG perpendicular al plano DEF y la O'G' perpendicular al plano D'E'F' y uniendo los puntos respectivos, tendremos

$$\triangle OGD\cong OGE\cong OGF\ [\text{Pl. II}]$$

luego $GD=GE=GF$

y por tanto será G el centro del círculo circunscrito al $\triangle DEF$.

Por la misma razon será G' el centro del círculo circunscrito al $\triangle D'E'F'$.

Ademas sabemos que

$$\triangle DOE\cong D'O'E',\ EOF\cong E'O'F',\ FOD\cong F'O'D'$$

luego $DE=D'E',\ EF=E'F',\ FD=F'D'$

de donde $\triangle DEF\cong D'E'F'$;

luego será DG=DG, pues los dos triángulos congruentes tienen igual la circunferencia que pasa por sus vértices; de donde se sigue

$$\triangle DGO\cong D'G'O'\ [\text{Pl. II}]$$

ó $GO=G'O'$.

Eso supuesto, pongamos D'E'F' en DEF de modo que D' caiga en D &a. luego caerá el punto G' en G, pues es posible un solo centro, y por tanto coincidirá G'O' con GC por ser perpendiculares al mismo plano é iguales entre sí; ahora tenemos el punto O' en O, D' caiga en D, E' en E y F' en F, luego los dos triedros coinciden

á saber $O\cong O'$.

Dem. Para el 4º puede reducirse por medio del triedro suplementario al 3º

Imaginémonos respectivamente á O y O' los suplementarios respectivos P y P', estos tendrán los ángulos planos respectivamente iguales por ser ángulos suplementarios á los respectivos diedros de O y O' que son por hipótesis iguales. De donde se sigue que P y P' tambien tienen respectivamente iguales los diedros y por tanto los triedros O y O' tienen respectivamente iguales los ángulos planos, luego serán congruentes [caso 3º]

Demostracion mas especificada:

Siendo A, B, C los ángulos diedros de O respectivamente iguales á A', B', C' los de O', se necesita de demostrar que a, b, c los ángulos planos de O son iguales á a', b', c' los de O'. Denotando por D, E, F los ángulos diedros de P, y sus planos por d, e, f, ademas por D', E', F' los diedros de P' y sus planos por d', e', f' tendremos:

$A+d=A'+d'=2R$, de donde por ser $A=A'$ se sigue $d=d'$ y por la misma razon $e=e'$ y $f=f'$

luego será $P\cong P'$ y por tanto

$$D=D',\ E=E',\ F=F'$$

pero es

$a+D=a'+D'=2R$ luego $a=a'$ y por la misma razon $b=b'$ y $c=c'$.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

CAPITULO II.

Poliedros.

§ 9. NOCIONES PRELIMINARES.

1ª Poliedro es un cuerpo totalmente terminado por polígonos; los polígonos se llaman *caras*, sus lados *aristas*, y el punto de concurso de estas *vértices*; *diagonal* es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

Cor 1. Hay en un poliedro ángulos sólidos, diedros y planos.

Cor. 2. En cada vértice se forma un ángulo sòlido, pues en otra suposicion no tendriamos un cuerpo limitado; luego en un vértice concurren al ménos tres caras; y por tanto un poliedro tendrá al ménos cuatro caras.

2ª Hay poliedros convexos y cóncavos, convexos son aquellos cuya superficie no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos, còncavos cuyas superficies pueden serlo en dos y mas puntos.

Nota. Tratamos solo de los convexos.

Cor. Todo plano secante de la superficie de un poliedro convexo forma un polígono convexo; pues si formase un polígono cóncavo, este podria ser cortado por una recta en mas que dos puntos, y por tanto lo mismo tendria lugar en la superficie del poliedro, lo que es contra la hipótesis.

3ª Se llama tetraedro, hexaedro, octaedro, decaedro, dodecaedro, icosaedro los poliedros de 4, 6, 8, 10, 12, 20 caras.

4ª Dos poliedros son congruentes si tienen todas las arristas, caras, ángulos diedros y sólidos respectiva y ordenadamente iguales; pero son semejantes si tienen iguales los mismos ángulos y solo semejantes las caras respectivas.

Nota. No se tratan especialmente los casos de congruencia y de semejanza; sinembargo para la congruencia tenemos el fundamento en el cap. I teor. 28.

5ª Un poliedro se llama regular, si tiene respectivamente iguales todas las aristas y todos los ángulos planos y diedros; luego en un polígono regular serán todas las caras poligonos regulares é iguales entre sí, ademas son iguales los ángulos diedros y sólidos.

De donde se ve que el cubo es un poliedro regular, cuyas caras son cuadrados de igual lado y los ángulos diedros rectos.

6ª Volùmen de un cuerpo es el espacio que ocupa. Para medir los volúmenes se toma ordinariamente por unidad un cubo cuya arista es la unidad de longitud.

7ª Especialmente tratamos de los poliedros particulares como son los prismas, las pirámides, poliedros regulares.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

§ 10. PRISMAS.

Expl. 1ª Se llama *prisma* un poliedro cuyas dos caras [llamadas *bases*] son polígonos *paralelos é idénticos*, y todas las demas son *paralelógramos*.

La distancia entre las dos bases es su *altura*, y *plano diagonal* el secante que pasa por dos aristas paralelas.

2ª Segun que la base es un triángulo cuadrilátero, pentágono &a, se llama el prisma triangular, cuadrangular, pentagonal &a.

3ª Un prisma es recto si las aristas laterales son perpendiculares á las bases.

4ª Cortando un prisma por un plano oblícuo á las bases, se tendrá un prisma truncado.

5ª Un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares se llama *regular*. La recta que une los centros de las bases se llama *eje*.

6ª Se llama paralelepípedo el prisma cuya base es un paralelógramo. El paralelepípedo es *rectángulo*, si es recto y ademas sus bases son rectángulos, luego todas sus seis caras son rectángulos; pero siendo todas sus caras cuadradas será un *cubo*.

Nota. El área de un prisma se determina fácilmente por los teoremas de la Geometría plana.

Teor. 1. [fig. 38]. Toda seccion paralela á la base de un prisma es congruente con la base.

Hip. $A'B'C'D'E' \ddagger ABCDE$.
Tes. $A'B'C'D'E' \cong ABCDE$.

Dem. $AA'B'B$ es un paralelógramo [I, 13], luego $AB = A'B'$, y por igual razon $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DE = D'E'$ y $EA = E'A'$; ademas los ángulos $E'A'B'$ y EAB son iguales por ser sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; lo mismo vale de todos los otros ángulos respectivos.

De donde tenemos dos polígonos que tienen respectivamente iguales todos los lados y ángulos comprendidos, luego son congruentes.

Teor. 2. [fig 39]. Las caras laterales opuestas de un paralelepípedo son paralelas y congruentes.

Tes. 1º $AEFD \ddagger BHGC$, 2º $AEFD \cong BHGC$.

Dem. parte 1ª

	$HB \ddagger EADF$ pues es $HB \ddagger EA$
	$BC \ddagger EADF$ pues es $BC \ddagger AD$
luego	$HBCG \ddagger EADF$ [I, 12]
parte 2ª	$EA = HB$ y $AD = BC$
ademas	$\sphericalangle EAD = HBC$ [I. 6 caso 1º]
luego	$EADF \cong HBGC$.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. Toda cara lateral puede considerarse como base.

Teor. 3. [fig. 39]. Los cuatro diagonales de un paralelepípedo se encuentran en un mismo punto.

Dem. Uniendo A con G, B con F, C con E y D con H se ve fácilmente que las cuatro rectas son dos á dos diagonales de un mismo paralelógramo, luego dos á dos se encuentran en su mitad y por tanto todos en un mismo punto.

Cor. Las diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales, pues todos los paralelògramos mencionados en la demostracion del teor. son rectángulos.

Teor. 4. [fig. 40]. Si las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo que concurren en un vértice, están espresadas por números que tienen relacion con la unidad de longitud, el producto de estos tres espresará cuántas veces la unidad de volúmen está contenida en el paralelepípedo rectángulo; ó en ménos palabras: el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de la base por la altura.

Tres casos pueden ocurrir.
1º Si las tres aristas se espresan por números enteros,
2º Si todas ó algunas por números fraccionarios,
3º Si todas ó algunas por números inconmensurables.

Dem. para el caso 1.º Siendo M el cubo tomado por unidad de volúmen, esté la longitud contenida 2 veces en BC, 3 en BA y 4 en BF; trazando por los puntos de division en BF planos paralelos á la base queda el paralelepípedo primero dividido en cuatro congruentes. Se ve fácilmente que el cubo de unidad está contenido en cada uno de estos 6[=3.2] veces y por tanto en el todo 6.4 veces ó 3.2.4 veces.

Dem. para el caso 2.º Siendo a, b, c las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo; ademas l la longitud de la arista del cubo de unidad, sea $a=\frac{m}{n}l$, $b=\frac{p}{q}l$ y $c=\frac{r}{s}l$ y tenemos

$$a=\frac{m}{n}l=\frac{mqs}{nqs}l=mqs.\frac{1}{nqs}l,$$

$$d=\frac{p}{q}l=\frac{pns}{nqs}l=pns.\frac{1}{nqs}l,$$

$$c=\frac{r}{s}l=\frac{rnq}{nqs}=rnq\frac{1}{nqs}l.$$

Luego el cubo cuya arista es igual $\frac{1}{nqs}l$ estará contenido en P mqs.pns.rnq veces [caso 1º]; ademas sabemos por el caso 1º que dicho cubo pequeño está contenido en el cubo de unidad M $[nqs]^2$ veces y por tanto el cubo de la unidad está contenido en P

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

$$\frac{mqs.pns.rnq}{(nqs)^3} \quad \text{veces } 6$$

$$P=\frac{mpr}{nqs}M$$

Caso 3º

Dem. 1ª es la misma que en la geom. pl. § 20, basta añadir otro número inconmensurable.

Dem. 2ª Siendo a, b, c los números inconmensurables de las aristas del paralelepípedo rectángulo P, y a′, b′, c′ números comensurables y variables, de modo que

$$\lim. a'=a, \ \lim. b'=b, \ \lim. c'=c$$

de donde $$\lim. a'b'c'=abc$$

ademas siendo $a'b'c'M=P'$, se aproximará P′ mas y mas á P si lo hacen a′, b′, c′ respectivamente á las aristas a, b, c, ó bien

$$\lim. P'=P.$$

Ahora tenemos:

$$\lim [a'b'c'.M]=abc.M \ \text{ y } \lim P'=P$$

ademas es siempre $a'b'c'.M=P'$

luego $abc.M=P$ [Pl. § 24.]

Nota. La forma algébrica $a\times b\times c$ ó $a.b.c$ puede denotar al mismo tiempo un paralelepípedo cuyas dimensiones son a, b, y c ó un producto qne denota cuantas veces la unidad de volúmen está contenido en el volúmen de dicho paralelepípedo.

Por lo mismo un cubo cuyo lado sea igual á c se denota por c^3.

Teor. 5. [fig. 41]. Dos paralelepípedos son iguales si tienen la base inferior comun y sus bases superiores entre las mismas paralelas.

Hip. EK‡HL.
Tes. Paralelepípedo AG=Paralelepípedo AL.

Dem. Los dos prismas triangulares AJEHMD y BKFGLC son congruentes, pues tienen todos sus elementos iguales y dispuestos de la misma manera y en el mismo sentido; ahora restando de todo cuerpo alternativamente uno de estos prismas se tendrá una vez AL y otra vez AG, luego AG=AL.

Teor. 6. [fig. 42]. Dos paralelepípedos son iguales si tienen la base inferior comun y sus bases superiores en el mismo plano.

Dem. Prolongadas las rectas EH y FG ademas LM y KJ hasta que se corten, está formado un paralelógramo congruente con la base, ahora unidos sus puntos con los respectivos de la base tenemos un nuevo paralelepípedo AP, del cual sabemos

$$AP=AG, \ AP=AL \ \text{[Teor. 5]}$$

luego $$AG=AL.$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. Todo paralelepípedo oblícuo se puede transformar en otro recto de igual volúmen, pues basta levantar desde las vértices de la base inferior perpendiculares á ella hasta que corten al plano de la base superior.

Teor. 7. [fig. 43]. Todo paralelepípedo recto puede transformarse en un paralelepípedo rectángulo.

Dem. Sea AF el paralelepípedo recto y AG, DH, CF, BE sus aristas perpendiculares, luego será AGHD un rectángulo. Ahora bien, tomemos dicho rectángulo por base y levantemos desde A, D, H, G perpendiculares á esta hasta cortar al plano de la base opuesta y tendremos en este plano el rectángulo LNPM, despues uniendo sus puntos con los respectivos de AGHD tendremos el paralelepípedo rectángulo AP igual al recto AF, pues tienen una base comun y la otra entre las mismas paralelas.

Teor. 8. [fig. 43]. El volúmen de todo paralelepípedo es igual al producto de la base por la altura.

Dem. Imaginémonos sobre el paralelógramo ABCD como base un paralelepípedo cualquier Q de altura igual á la AG del paralelepípedo recto AF, de donde tenemos siendo AP el paralelepípedo rectángulo correspondiente

$$Q=AF=AP$$

sabemos que $AP=ALMD\times AG$ [teor. 4]
pero $ALMD=ABCD$
luego $AP=ABCD\times AG$
ó $Q=ABCD\times AG.$

Cor. Todos los paralelepípedos de igual base é igual altura son iguales, pues tienen el mismo volúmen.

Teor. 9. [fig. 44]. Todo paralelepípedo recto se descompone en dos prismas triángulares iguales por medio de un plano diagonal que es perpendicular á la base.

Hip. FHDB el plano diagonal y $\perp$ ABCD.
Tes. ABDEFH=CDBGHF.

Dem. Póngase BCD sobre DAB de modo que caigan B en D, C en A y D en B y estarán CG en AE, DH en BF y BF en DH, por ser todas las rectas perpendiculares al plano ABD é iguales entre sí (hip.), luego coinciden todos los puntos de un prisma con los respectivos del otro, y por tanto los prismas triangulares son congruentes entre sí.

Teor. 10. (fig. 55). Todo paralelepípedo oblícuo se descompone en dos prismas triangulares iguales por medio de un plano diagonal.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Hip. ACGE es el plano diagonal del paralelepípedo oblicuo AG.
Tes. ADCGHE=ABCGEF.

Dem. Trácense por los dos vértices A y E planos perpendiculares á la arista AE, y tendremos un paralelepípedo recto AbcdEfgh que resulta prolongando las caras del prisma oblicuo; ademas el paralelepípedo oblicuo es igual al recto, pues la base AEHD es igual á la AEhd y la altura es comun [II, 8 cor.]

Ahora considerando los cuerpos AcdCD y EghGH vemos que son congruentes, puesto que poniendo Acd sobre Egh en sus puntos correspondientes caerán cC en gG y dD en hH pues son respectivamente iguales y perpendiculares al mismo plano Egh; luego coinciden todos los puntos correspondientes de los dos cuerpos y por tanto son congruentes. De donde se sigue

ACDEgh+EghHG=ACDEgh+AcdDC
ó ACDEGH=AcdEgh

ya sabemos que AcdEgh=AcbEgf=$\frac{1}{2}$Ag [II 9]
luego ACDEGH=$\frac{1}{2}$Ag=$\frac{1}{2}$AG [II, 8 cor.]

de donde por ser ACDHEG+ACBFEG=AG
será ACDHEG=ACBFEG.

Cor. 1. El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura, pues el prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura [teor.]

Cor. 2. El volúmen de un prisma triangular es tambien igual á la mitad del producto de una cara por su distancia á la arista opuesta; pues completando el prisma triangular á un paralelepípedo, este será el doble del prisma.

Teor. 11. [fig. 46.] El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

Dem. Trazando desde la arista BG planos diagonales, se descompone el prisma principal en tres prismas triangulares que tienen con el total la altura *h* comun; luego será, denotando por Pt el prisma total:

$$Pt=BAE\times h+BED\times h+BDC\times h$$
ó
$$Pt=[BAE+BED+BDC]\times h$$
luego
$$Pt=ABCDE\times h.$$

Cor. El volúmen de un prisma es tambien igual al producto de la arista por una seccion perpendicular; pues esto tiene lugar para un prisma triangular. [Dem. del teor. 10.]

Nota. El área lateral de un prisma es la suma de los paralelógramos laterales, y por consiguiente es igual al producto del perímetro de la base por la altura de los paralelógramos, pues todos èstos tienen igual altura; de donde se sigue que el área de un pris-

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

ma recto ó regular es igual al producto del perímetro por la altura del prisma.

§ 11. PIRÁMIDES.

Explicaciones.

1ª Se llama pirámide el poliedro cuya base es un polígono y cuyas caras son triángulos que concurren en un mismo punto.

El punto comun se llama cúspide.

Altura es la perpendicular bajada desde la cúspide hasta la base.

Cor. El número de las caras triangulares es igual al número de los lados de la base.

Nota. Si se une un punto fuera del plano de un polígono con los vértices de este, se tendrá una pirámide.

2ª La pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal &a. segun que la base es un triángulo, cuadrilátero, pentágono &a.

Cor. Una pirámida cuya base es un polígono de n lado se puede descomponer en [n—2] pirámides triangulares [fig. 47].

3ª La pirámide es regular si su base es un polígono regular y la cúspide está situado en la perpendicular levantada desde el centro de la base á ella.

Cor. 1. Todas las aristas de una pirámide regular son iguales y tienen la misma inclinacion respecto de labase, pues pertenecen á triángulos rectángulos congruentes si se unen sus puntos extremos con el centro de la base.

Cor. 2. Todos los triángulos laterales son congruentes entre sí, pues tienen respectivamente iguales todos los lados.

Cor. 3. Dichos triángulos tienen la misma inclinacion respecto á la base, lo que se manifiesta trazando los apotemas de aquella.

4ª Se llama tronco de una pirámide la porcion de esta comprendida entre la base y una seccion paralela á ella.

5ª El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de la base por la altura de uno de los triángulos, pues todos estos son congruentes entre sí.

Teor. 12. [fig. 48]. Toda seccion paralela á la base de una pirámide es semejante á esta.

Hip. ABCD ∦ abcd.
Tes. ABCD∼abcd.

Dem. AB : ab=BP : bP=BC : bc=CP : cP=&a.
luego AB : ab=BC : bc=CD : cd=DA : da

ademas es ∢ABC=abc, BCD=bcd, &a [I, 6]
luego ABCD∼abcd.

Teor. 13. [fig. 48]. La base y la seccion paralela de una pirámide están entre sí como los cuadrados de sus distancias á la cúspide.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Hip. $ABCD \ddagger abcd$ y PE la altura.
Tes. $ABCD : abcd = PE^2 : Pe^2$.

Dem. Uniendo B con E y b con e las rectas BE y be son paralelas entre sí [I, 13]; de donde tenemos

$$PE : Pe = PB : Pb = AB : ab$$

ò $$PE^2 : Pe^2 = AB^2 : ab^2$$

pero $$ABCD : abcd = AB^2 : ab^2 \quad [\text{Pl. VII, } 29]$$

luego $$ABCD : abcd = PE^2 : Pe^2.$$

Cor. Si dos pirámides de igual altura se cortan por planos á igual distancia del vértice y paralelos á sus bases, las secciones y las bases son proporcionales entre sí; y si las bases son iguales las secciones tambien lo serán.

Dem. Denotando la altura igual y la distancia igual por h y d, ademas las bases por B y B′, y las secciones respectivas por b y b′ tenemos

$$B : b = h^2 : d^2 = B' : b'$$

luego si $B = B'$ será $b = b'$.

Teor. 14. [fig. 49]. Dos pirámides triangulares son iguales si tienen la base y la altura igual.

Hip. $ABC = A'B'C'$ y ED la altura comun.
Tes. $P = P'$.

Dem. Estando las dos pirámides sobre el mismo plano, dividamos la altura comun DE en n partes iguales, y por los puntos de division hagamos pasar planos paralelos á las bases, de modo que formen secciones iguales en las pirámides [II, 13 cor.]. Formando ahora sobre estas secciones como bases prismas internos, estos serán iguales, pues tienen igual base y altura; luego las sumas de los prismas de la una pirámide y de la otra son iguales, y permanecerán iguales dividiendo DE en mas partes iguales y repitiendo la misma construccion. Pero siendo las partes de DE siempre mas pequeñas, la suma de los prismas se aproximará mas y mas á la pirámide, de modo que la diferencia entre estos puede ser menor que toda cantidad asignable, y por tanto denotando por S la suma de los prismas de P y por S′ la de P′, tenemos

$$\text{lim. } S = P, \quad \text{lím. } S' = P'$$

ademas es siempre $S = S'$

luego $P = P'$ [Pl. § 24].

Teor. 15. [fig. 50]. Todo prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides triangulares iguales.

Dem. Haciendo pasar por ACE un plano, se divide el prisma

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

en la pirámide triangular ACBE y en la cuadrangular ACFDE; la última se descompone por un plano que pase por DCE en los dos triangulares ADCE y FDCE.

Ahora bien, las dos últimas pirámides son iguales, pues tienen las bases ADC y FDC iguales y la cúspide E comun; ademas la pirámide FDCE es la misma que DFEC, pero DFEC es igual á ACBE, pues las bases ACB y DFE son iguales y tienen comun la altura del prisma. Luego las tres pirámides en las cuales hemos descompuesto el prisma son iguales entre sí.

Cor. 1. Una pirámide es la tercera parte de un prisma que tiene la misma base y altura.

Dem. [fig. 50]. Teniendo la pirámide ACBE siempre se puede completar un prisma; pues trazando EF paralela è igual á BC y ED paralela é igual á BA y uniendo los puntos respectivos se tendrá un prisma de igual base y altura, y ademas la pirámide es la tercera parte del prisma.

Cor. 2. El volúmen de la pirámide triangular es la tercera parte del producto de la base por la altura; pues el volúmen de la pirámide es la tercera parte del volúmen de un prisma que tiene la misma base y altura; ya sabemos que el volúmen de este prisma es el producto de la base por la altura [II, 11].

Teor. 16. El volúmen de una pirámide es igual al tercio del producto de la base por la altura.

Dem. Descomponiendo la base por diagonales en triángulos y por tanto la pirámide en pirámides triangulares [fig. 47] que tienen la altura igual, el volúmen de toda pirámide es igual al tercio del producto de la suma de los triángulos [que es la base total] por la altura.

Cor. 1. Dos pirámides son proporcionales á los productos de las bases por las alturas.

Dem. Siendo b, b′ las bases y h, h′ las alturas de los pirámides P y P′

tenemos $$P=\tfrac{1}{3}bh \quad y \quad P'=\tfrac{1}{3}b'h'$$

luego $$P:P'=\tfrac{1}{3}bh:\tfrac{1}{3}b'h'=bh:b'h'.$$

Cor. 2. Siendo las bases iguales tenemos

$$P:P'=h:h'$$

Cor. 3. Siendo las alturas iguales tenemos

$$P:P'=b:b'$$

Cor. 4, Siendo al mismo tiempo iguales las bases y las alturas tenemos

$$P=P'.$$

Teor. 18. [fig. 48]. Denotando en el tronco de pirámide ABCDabcd la base inferior ABCD por b, la base superior abcd por b′ y la altura Ee por h se espresa el volúmen por la fórmula siguiente:

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

$$V=\tfrac{1}{3}h\,[b+b'+\sqrt{b.b'}]$$

Dem. Siendo $x=Pe$ tenemos

$$V=\tfrac{1}{3}\,b\,[h+x]-\tfrac{1}{3}b'x.$$

Para determinar x apliquemos el teor. 13, y tendremos:

$$[h+x]^2:x^2=b:b'$$

ó $$h+x:x=\sqrt{b}:\sqrt{b'}$$

de donde $$h:x=\sqrt{b}-\sqrt{b'}:\sqrt{b'}$$

luego $$x=\frac{h\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}.$$

de donde $$x=h\frac{\sqrt{b'}[\sqrt{b}+\sqrt{b'}]}{b-b'}=h\,\frac{b'+\sqrt{bb'}}{b-b'}$$

luego $$h+x=h+h\,\frac{b'+\sqrt{bb'}}{b-b'}=h\,\frac{b-b'+b'+\sqrt{bb'}}{b-b'}$$

ó $$h+x=h\,\frac{b+\sqrt{bb'}}{b-b'}$$

Poniendo ahora los valores de x y [h+x] en la ecuacion primera tendremos

$$V=\tfrac{1}{3}\,b\,h\,\frac{b+\sqrt{bb'}}{b-b'}-\tfrac{1}{3}b'h\,\frac{b'+\sqrt{bb'}}{b-b'}$$

luego $$V=\tfrac{1}{3}h\frac{b^2+b\sqrt{bb'}-b'^2-b'\sqrt{bb'}}{b-b'}$$

„ $$V=\tfrac{1}{3}h\frac{[b+b'][b-b']+\sqrt{bb'}[b-b']}{b-b'}$$

lo que da $$V=\tfrac{1}{3}\,h\,[b+b'+\sqrt{bb'}]$$

§ 12. POLIEDROS REGULARES.

Teor. 19. No hay mas que cinco poliedros regulares, y son:

1° tetraedro terminado por 4 triángulos regulares,
2° octaedro............ 8.............
3° icosaedro............ 20.............
4° exaedro...............6 cuadriláteros regulares,
5° dodecaedro.......... 12 pentágonos regulares.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. El fundamento de la demostracion es el teor. 25 del Cap. I, á saber: la suma de todos los ángulos planos de un ángulo sólido es menor que 4R ó $S<4R$.

1° Reuniendo tres triángulos equiláteros para formar un ángulo sòlido tenemos $S=3.\frac{2}{3}R=\frac{6}{3}R$

luego $S<4R$ y resulta el *tetraedro.*

2° Reuniendo 4 triángulos equiláteros tenemos

$$S=4.\tfrac{2}{3}R=\tfrac{8}{3}R$$

luego $S<4.R$ y resulta el *octaedro*

3° Reuniendo 5 triángulos equiláteros tenemos

$$S=5.\tfrac{2}{3}R=\tfrac{10}{3}R$$

luego $S<4R$ y resulta el *icosaedro.*

Pero reuniendo 6 triángulos equiláteros, tenemos

$$S=6.\tfrac{2}{3}R$$

luego $S=4R$ y tomando 7, 8 &a.

siempre será $S>4R$; de donde se sigue que por el triángulo regular solo se pueden formar 3 cuerpos regulares.

4° Reuniendo 3 cuadrados para formar un ángulo sólido, tenemos

$$S=3.1R$$

luego $S<4R$ y resulta el cubo ó exaedro,

Pero tomando mas cuadrados no se cumple la condicion

$$S<4R.$$

5° Reuniendo 3 pentágonos regulares para formar un ángulo sólido tenemos

$$S=3.\tfrac{6}{5}R=\tfrac{18}{5}R$$

luego $S<4R$ y resulta el dodecaedro.

Pero tomando mas pentágonos regulares no se cumple la condicion $S<4R$.

Ahora bien, podemos fácilmente ver que no se pueden reunir los ángulos de los otros polígonos regulares para formar un ángulo sólido de 3 caras y mucho ménos para formarlo con mas caras.

Un ángulo de un poliedro regular es igual á

$$\frac{[2n-4]}{n}R \quad \text{ó} \quad 2R-\frac{4}{n}R$$

luego será

$$S=3.[2R-\frac{4}{n}R]=6R-\frac{12}{n}R$$

pero siendo $n>5$ será $\frac{12}{n}\leqq 2R$

y por tanto nunca se cumple la condicion

$$S<4R.$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 20. [fig. 52]. Todo poliedro regular tiene un punto que equidista de las caras y vértices.

Nota. Aunque la construccion sea aplicable á todo poliedro la haremos para mas facilidad en un triedro.

Dem. 1º Unidos los centros E y E′ de dos caras adyacentes con el punto medio F de la arista comun, el ángulo que forman las dos apotemas es la medida del ángulo diedro, y su plano será perpendicular á los dos planos por ser perpendicular á la seccion comun; luego las perpendiculares levantadas en los puntos E y E′ de las dos caras estarán en dicho plano [I, 21 cor. 2], y por tanto se cortarán de manera que OE=OE′ por ser △EOF≅E′OF.

Ahora bien, levantando en el centro E″ de la cara adyacente á CDA una perpendicular, esta pasará por el punto O y es igual á OE′, pues la cara CDB es la misma que ADB, solo está opuesto á otro lado igual, pero con la misma inclinacion que ántes, y por tanto resultarán las mismas relaciones.

Ya se ve que de esta manera se puede extender succesivamente la demostracion á todas las caras, y por consiguiente O equidista de todas las caras.

2º Por ser △OE′C≅OEB [Pl. II, 7] se sigue que CO=BO, lo que tiene lugar con todos los vértices, luego el punto O equidista de todos los vértices.

Nota. El punto O se llama *centro* del poliedro regnlar, la distancia de O á los vértices *radio* y la distancia de O de las caras *apotema.*

Teor. 21. El volúmen de un poliedro regular es igual al tercio del producto de la superficie de este por su apotema.

Dem. Unidos todos los vértices con el centro, el poliedro está descompuesto en tantas pirámides cuantas son sus caras, y la altura de todas estas es el apotema.

§ 13. APÉNCICE AL CAPÍTULO II.

I. *Obelisco.*

1º Obelisco es un poliedro convexo terminado por dos bases paralelas de igual número de lados que son ordenadamente de dos en dos paralelos, ademas por solas caras laterales cuadriláteras, cuyos dos lados son los dos paralelos de las bases.

ABCDEabcde [fig. 53] es un obelisco.

Cor. 1. Las caras laterales solo pueden ser trapecios ó paralelógramos.

Cor. 2. El tronco de pirámide puede considerarse como un obelisco cuyas aristas prolongadas se encuentran en un mismo punto.

Cor. 3. Haciendo pasar por el punto medio de una arista la-

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

teral un plano paralelo á la base, el perímetro de la seccion pasará por todos los puntos medios de las otras aristas laterales [I, 16], y por tanto se llama seccion media.

Cor. 4. Un obelisco cuyas bases son triángulos es al mismo tiempo un tronco de pirámide, pues sus aristas prolongadas pasan por el mismo punto [I, 4 cor.]

2° Prolongando dos caras opuestas de un obelisco de cuatro caras se tendrán dos troncos de pirámides cuya diferencia es el obelisco.

Dem. [fig. 54] Prolongando las caras ABab y DCdc hasta que se corten por la arista eE tendremos los troncos de pirámide BCEbce y ADEade, ademas la diferencia entre estos es cabalmente el obelisco como manifiesta la figura.

3° Prolongando dos caras opuestas de un obelisco de cinco caras [fig. 53] se tendrán un obelisco de cuatro caras y un tronco de pirámide cuya diferencia es el obelisco de cinco caras [fig. 00]; en genreral se puede prolongar dos caras de un obelisco de n caras laterales, de manera que se tendrán un tronco de pirámide y un obelisco de [n—1] caras, cuya diferenciaes igual al primer obelisco.

Nota. La diferencia de las bases respectivas será tambien igual á la del primer obelisco. [Véanse las fignras.]

4° Para espresar el volúmen de un tronco de pirámide por sus bases b, b′ y la seccion media m, apliquemos la fórmula encontrada en la demostracion del teor, 18.

$$h:x=\sqrt{b}-\sqrt{b'}:\sqrt{b'}$$

luego

$$\tfrac{1}{2}h:x=\sqrt{m}-\sqrt{b'}:\sqrt{b'}$$

ó

$$h:x=2[\sqrt{m}-\sqrt{b'}]:\sqrt{b'}$$

luego

$$2\sqrt{m}-2\sqrt{b'}=\sqrt{b}-\sqrt{b'}$$

ó

$$2\sqrt{m}=\sqrt{b}+\sqrt{b'}$$

luego

$$4m=b+b'+2\sqrt{bb'}$$

ó

$$\sqrt{bb'}=2m-\frac{b+b'}{2}$$

Poniendo el valor encontrado de $\sqrt{bb'}$ en la $V=\frac{1}{3}h[b+b'+\sqrt{bb'}]$ tendremos una otra que espresa el volúmen del tronco de pirámide

$$V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(b+b')+2m]$$

5° Denotando las dos bases de un obelisco cualquier por B y B′ y la seccion media por M tendremos para el volúmen la misma fòrmula del nº 4°

$$V=\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}(B+B')+2M].$$

Dem. 1ª para un obelisco de cuatro caras. Sabemos que su volúmen es la diferencia entre dos troncos de pirámide [fig. 54];

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Ahora bien, denotemos por C, C′, N las bases y la seccion media del uno y por D, D′, S las del otro y tendremos

$$\alpha) \quad V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(C+C')+2N]-\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(D+D')+2S]$$

ó

$$V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(C-D+C'-D')+2(N-S)]$$

β) pero sabemos que $C-D=B$, $C'-D=B'$, $N-S=M$

luego $$V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(B+B')+2M]$$

Dem. 2ª para un obelisco cualquier.

Si tenemos un obelisco de cinco caras denotemos por C, C′, N las bases y la seccion media del obelisco de cuatro caras y por D, D′, S las del tronco de pirámide, y tendremos las mismas fórmulas α y β y por tanto la última.

De donde se ve que de manera semejante podemos proceder hasta el infinito y siempre tendremos la misma fórmula final y por consiguiente se verifica en general:

$$V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(B+B')+2M]$$

Nota. La definicion mas general del obelisco es la siguiente: Obelisco es un poliedro convexo terminado por dos bases paralelas y ademas por solas caras laterales, cuyas aristas pasan por dos vértices de las bases.

En esta definicion está incluida la que hemos puesto en el nº 1º, sinembargo es mas general, pues las caras laterales pueden ser triángulos. Ademas se verifican tambien en esta definicion el cor. 2, cor. 3, cor. 4 y nº 2, 3, 4, 5 y por tanto la fórmula que espresa el volúmen.

Podemos decir mas, que dicha definicion como comprende la del prisma así la de la pirámide, con tal que se quiera considerar la cúspide como plano indefinidamente pequeño y paralelo á la base. De donde se sigue que la fórmula

$$V=\tfrac{1}{3}h[\tfrac{1}{2}(B+B')+2M]$$

es general relativamente á los poliedros considerados.

II. *Prisma recto triangular truncado.*

1º *Éxpl.* Se tiene un prisma truncado cuando se hace pasar por el prisma un plano oblicuo á la base.

2º El volúmen de un prisma recto triangular troncado [fig 56.] es igual á un tercio del producto de la base por la suma de las tres aristas; esto es, siendo b la base y p, q, s las aristas

$$V=\tfrac{1}{3}b[p+q+s]$$

Dem. Hagamos pasar por el punto estremo D de la arista menor AD un plano paralelo á la base, que divide el tronco en un prisma recto y una pirámide.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Ahora bien, denotemos AD por p, BF por q, CE por s, CB por n y por h la distancia del punto D del plano EFCB, ademas por V' el volúmen del prisma y por V'' el de la pirámide, y tendremos:

$$V=V'+V''$$
$$V'=b.p=\tfrac{1}{2}CBGH.h=\tfrac{1}{2}pnh$$

y $$V''=\tfrac{1}{3}h\,[EFGH]=\tfrac{1}{3}h.n.\frac{q+s-2p}{2}$$

ya sabemos que $\tfrac{1}{2}pnh=b.p$

y por consiguiente será $nh=2b$

luego $$V''=\tfrac{1}{3}b[q+s-2p]$$

„ $$V=bp+\tfrac{1}{3}b[q+s-2p]=\tfrac{1}{3}b[3p+q+s-2p]$$

ó $$V=\tfrac{1}{3}b[p+q+s].$$

CAPITULO III.

Cilindro y cono.

§ 14. CILINDRO.

Expl. Se llama cilindro el cuerpo engendrado por un rectángulo que gira al sededor de uno de sus lados llamado eje.

La fig. 57 representa un cilindro cuyo rectángulo generador es OO'BA y OO' el eje.

Cor. 1. Las bases de un cilindro son círculos iguales, pues todos los puntos determinados por A y B tienen igual distancia de O y O', ademas OA y O'B estarán girando siempre en el mismo plano perpendicular al eje OO' [I, 8 cor. 2].

Cor. 2. Las bases de un cilindro son paralelas entre sí, pues son perpendiculares á OO' y por tanto el eje es al mismo tiempo la altura.

Cor. 3. Levantando en un punto P de la circunferencia de la base una perpendicular á ella hasta cortar la otra, esta estará toda en la superficie del cilindro, pues dicha perpendicular es cabalmente la posicion del lado generador AB en este punto.

Cor. 4. Haciendo pasar por un punto P de la circunferencia de la base de un cilindro un plano perpendicular á ella, este formará en la superficie lateral una recta paralela é igual al eje.

Dem. La perpendicular PQ estará toda en el plano perpendicular [I, 21 cor. 2] y al mismo tiempo en la superficie lateral segun el cor. 3, luego es recta comun y ademas paralela é igual al eje [cor. 3].

Cor. 5. Si corta dicho plano á la circunferencia de la base, la seccion del cilindro será un rectángulo, pues formará en la superficie lateral dos rectas paralelas é iguales entre sí [cor. 4], ademas

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

estas son perpendiculares á la base [cor. 4] y por tanto á la recta que las une en la base.

De donde se sigue que si el plano perpendicular pasa por el eje formara un rectángulo cuyos lados sou el diámetro de la base y la altura del cilindro.

Cor. 6. La superficie lateral de un cilindro puede desarrollarse en un plano; pues lo pueden al mismo tiempo las dos circunferencias de las bases, y por tanto todas las rectas que unen dos puntos correspondientes de ellas; en el supuesto estarán todos los puntos de la superficie lateral en el mismo plano, pues todos los de esta están situados en la recta que une dos puntos correspondientes PP′ de la circunferencia de la base.

Teor. 1. [fig. 58]. Toda seccion paralela á la base de un cilindro es un círculo igual á la base.

Dem. Haciendo pasar por un punto cualquier P″ del perímetro de la seccion y por el eje un plano, será

$$O''P'' \ddagger OP \ [I, 13] \text{ y } PP'' \ddagger OO'' \ [\text{cor. 5 de la expl.}]$$

luego $POO''P''$ es un paralelógramo

» $OP = O''P''$

y por tanto todos los puntos del perímetro de la seccion tienen igual distancia de O″, luego la seccion es un círculo, ademas su radio es el de la base, luego la seccion es igual á la base.

Teor. 2. [fig. 59]. El área de la superficie lateral de un cilindro es igual al producto de la altura por la circunferencia de la base.

Dem. Formando en la base inferior un polígono regular y levantando en los vértices perpendiculares hasta cortar la base superior, tendremos un prisma recto regular que duplicando succesivamente los lados se aproximará mas y mas al cilindro tanto en su superficie como en su volúmen.

Ahora bien, denotemos por S y S′ las superficies laterales del cilindro y del prisma por p el perímetro de la base del prisma, por C la circunferencia del cilindro, ademas por r el radio de C y por h la altura comun, y tenemos:

$$S' = h.p$$

pero $\lim. S' = S$ y $\lim. hp = C$

luego $S = C.h = 2\pi.r.h$

Teor. 3. [fig. 59]. El volúmen de un cilindro es igual al producto de la base por la altura.

Dem. Hecha la construccion como en el teor. 2, denotemos por V, V′ los volúmenes del cilindro y prisma y por b, b′ las bases respectivas, y tendremos:

$$V' = h.b'$$

$\lim. V' = V$ y $\lim. hb' = hb$

luego $V = hb = \pi r^2 h.$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

§ 15. CONO.

Expl. Se llama cono el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de sus catetos llamado eje.

La fig. 60 ABC es un cono, COB ó COA es el triángulo generador, CO el eje, la curva descrita por B es la base, el vértice C del triángulo se llama cúspide del cono.

Cor. 1. La base de un cono es un círculo cuyo radio es el cateto móvil; pues todos los puntos determinados por B tienen igual distancia de O, ademas OB estará siempre en el mismo plano perpendicular al eje [I, 8 cor. 2]. De donde se sigue tambien que el eje es la altura del cono.

Cor. 2. La recta que une la cúspide con un punto cualquier P de la circunferencia de la base, está toda en la superficie lateral del cono y su longitud es constante, pues la recta CP es la posicion de CB en el punto P.

Dicha recta se llama lado del cono.

Cor. 3. La seccion de un plano que pasa por el eje de un cono es un triángulo isòsceles, pues

$$CP=CB=CP' \quad [\text{cor. } 2].$$

Cor. 4. La superficie lateral de un cono puede desarrollarse en un plano; pues lo puede [estando la cúspide C fija en el plano] la circunferencia de la base, y por tanto todas las rectas que unen el vértice con los puntos de ella; en este supuesto estarán todos los puntos de la superficie lateral en el plano, porque no hay ningun punto fuera de dichas rectas.

Teor. 4. [fig. 61]. Toda seccion paralela á la base de un cono es un círculo.

Dem. Haciendo pasar por un punto cualquier P del perímetro de la seccion y por el eje un plano que forma en la superficie la recta CPQ, unimos O' con P y O con Q y será siendo COA el triángulo generador

$$O'D \ddagger OA \;\;) \;\; O'P \ddagger OQ$$

luego $DO':AO=CO':CO=PO':QO$

ò $DO':PO'=AO:QO$

pero es $AO=QO$ luego $DO'=PO'$.

De donde se sigue que el perímetro de la seccion tiene en todos sus puntos la distancia DO' del punto O' y por tanto esta es un círculo.

Cor. 1. Las circunferencias de la base y de la seccion son proporcionales á las distancias del vértice; pues son entre sí como sus radios y estos como dichas distancias.

Cor. 2. La seccion y la base son proporcionales á los cuadrados de las distancias respectivas del vértice; pues los dos círculos están entre sí como los cuadrados de sus radios y estos como los de las distancias respectivas.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 5. El área de la superficie lateral de un cono es igual á la mitad del producto de la circunferencia de la base por el lado del cono.

Dem. Formando en la base un polígono regular y uniendo los vértices con la cúspide del cono, tendremos una pirámide recta regular la que si se duplican sucesivamente los lados se aproximará mas y mas al cono tanto en superficie como en volúmen.

Ahora bien, siendo S y S′ las superficies laterales del cono y de la pirámide p y p′ los perímetros respectivos de la base, l el lado del cono y l′ la altura de la cara lateral de la pirámide, r el radio de la base, tendremos

$$S'=\tfrac{1}{2}p'.l'$$

pero $\lim S'=S$ y $\lim \tfrac{1}{2}p'l'=\tfrac{1}{2}pl$

luego $S=\tfrac{1}{2}pl=\pi rl$

Teor. 6. El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de la base por la altura.

Dem. Haciendo la misma construccion que en el teor 5, sean V y V′ los volúmenes del cono y de la pirámide, b y b′ las bases respectivas, h la altura comun, tendremos:

$$V'=\tfrac{1}{3}hb'$$

pero $\lim V'=V$ y $\lim \tfrac{1}{3}hb'=\tfrac{1}{3}hb$

luego $V=\tfrac{1}{3}hb=\tfrac{1}{3}\pi r^2h.$

Teor. 7. El área de la superficie lateral del cono troncado es igual á la mitad del producto de su lado por la suma de las circunferencias de sus bases.

Dem. Denotando en la fig. 61 AD por l, DC por x, las circunferencias por C y c, el área lateral del cono mayor por $S_,$ y por $s_,$ la del menor, tenemos

$$S=S_,-s_,=\tfrac{1}{2}[(l+x)C-xc]$$

ó $S=\tfrac{1}{2}[l.C+x(C-c)]$

ya sabemos que

$$C:c=l+x:x \text{ [teor. 4 cor.]}$$

luego $C-c:c=l:x$

de donde $[C-c]x=c.l$

lo que si se pone en la fórmula de arriba dará

$$S=\tfrac{1}{2}[lC+lc]$$

ó $S=\tfrac{1}{2}l[C+c]=\pi l[R+r].$

Teor. 8. Denotando en un cono truncado la base inferior por B, la superior por b y su altura por h, se expresa el volúmen por la fórmula siguiente

$$V=\tfrac{1}{3}h[B+b+\sqrt{Bb}]$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Haciendo la misma construccion que en el teor. 5 tendremos un tronco de pirámide regular y denotando por B′ y b′ las bases respectivas será

$$V'=\tfrac{1}{3}h[B'+b'+\sqrt{B'.b'}]$$

pero $\lim V'=V$, $\lim B'=B$ y $\lim b'=b$

luego $$V=\tfrac{1}{3}h[B+b+\sqrt{B.b}]$$

ó $$V=\tfrac{1}{3}\pi h[R^2+r^2+R.r]$$

CAPITULO IV.

Esfera.

§ 16. PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

Explicacion. Esfera es un cuerpo totalmente cerrado de una superficie curva cuyos puntos todos equidistan de otro interior llamado centro. [fig. 62] O es el centro.

La distancia igual se llama *radio*, y *diámetro* la recta que pasa por el centro y termina en ambos lados de la superficie, luego el diámetro es el duplo del radio. Los dos puntos estremos de un diámetro son puntos opuestos de la esfera P y P′.

La esfera se puede considerar engendrada por la rotacion de un semicírculo PBP′ al rededor de su diámetro PP′, pues todos los puntos de la superficie curva engendrada equidistan del centro del semicírculo generador.

Cor. 1. No hay mas que un centro en una esfera, porque juntando en otra suposicion estos dos centros por medio de un diámetro comun se seguiria que los radios no serian iguales en la esfera relativamente al mismo centro.

Cor. 2. Todas las esferas de igual radio son congruentes, puesto que poniendo un centro sobre otro coincidirán una superficie con la otra, pues tienen en todos sus puntos igual distancia del centro comun.

Cor. 3. La seccion de un plano que pase por el centro de una esfera es un círculo cuyo radio es el de la esfera, pues la curva formada en la superficie está situada en un plano con el centro y todos sus puntos equidistan del centro de la esfera, por ser puntos de su superficie; luego la seccion es un círculo cuyo radio es el de la esfera.

Cor. 4. Dicha seccion divide la esfera en dos partes iguales, pues doblando la parte superior por el círculo comun, necesariamente coincidirá con la parte inferior, porque en otra suposicion los ra-

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

dios en una misma esfera no serian iguales.

Cor. 5. Una secante no tiene mas que dos puntos comunes con la superficie de la esfera.

Dem. Haciendo pasar por la recta y el centro de la esfera un plano, es menester que los puntos comunes de la recta y la esfera estén situados en la circunfrrencia formada, pero estos no son mas que dos [Pl. IV 15]; luego la recta tendrá tambien con la esfera solo dos puntos comunes.

Teor. 1. [fig. 62]. Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.

Dem. Haciendo pasar un plano cualquiera por la esfera tomemos dos puntos cualesquiera D y E en la curva descrita, despues bajemos desde el centro O una perpendicular á dicho plano, sea OC y juntemos los puntos respectivos y será:

$$\triangle CDO \cong CEO$$

por ser OC comun, OE=OD, $\sphericalangle$OCE=OCD=R [constr.], de donde tenemos CE=CD ó todos los puntos de la curva están á igual distancia de C, por ser D y E puntos cualesquiera; luego la curva es una circunferencia cuyo centro es C.

Cor. 1. La recta que une el centro de la esfera con el de la seccion es perpendicular á ella y por tanto la perpendicular á la seccion en su centro pasará por el de la esfera.

Cor. 2. Siendo d la recta que une los dos centros, r el radio de la seccion y R el del círculo, siempre tendrá lugar la relacion siguiente:

$$r^2 = R^2 - d^2$$

De donde se sigue

1º Dos secciones de igual distancia del centro de la esfera son iguales é inversamente; pues siendo $d=d'$ será $r=r'$ y siendo $r=r'$ será $d=d'$.

2º De dos secciones es la mayor la que mas se acerca al centro é inversamente; pues tiendo $d<d'$ será $r>r'$
y siendo $r>r'$ será $d<d'$.

3º Las secciones mayores son las que pasan por el centro de la esfera, pues en el caso en que no pasan será siempre $r<R$, pero en el segundo $r=R$ [$d=o$].

De donde el círculo cuyo centro es el de la esfera se llama círculo máximo; y que todos los círculos máximos son iguales entre sí.

Expl. Prolongando la recta que une los centros de la seccion y de la esfera hasta que corte en dos puntos á la superficie de la esfera, se tendrán dos puntos opuestos de ella que se llaman polos de la seccion; y por tanto dos polos de un círculo, su centro y el de la esfera, están en la misma recta que es perpendicular al plano del círculo.

Cor. 3. Todos los puntos de la circunferencia de la seccion equidistan de los polos. Siendo e y e' las distancias de un punto cual-

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

quiera de dicha circunferencia será

una vez $e^2=[R-d]^2+r^2$

otra vez $e'^2=[R+d]^2+r^2$

luego donde sean los puntos los valores respectivos de e y e' son siempre los mismos.

Teor. 2. Dos círculos máximos de una misma esfera se cortan mútuamente en dos puntos opuestos de la esfera, ademas son bisectrices entre sí.

Dem. Los planos de dos círculos máximos pasan por el centro luego tienen el diámetro comun, y por tanto tambien los puntos extremos de él ódos opuestos de la esfera, ademas el diámetro comun divide cada círculo en dos partes iguales, á saber, los círculos máximos son bisectrices.

Cor. 1. Por dos puntos opuestos pueden pasar infinitos círculos máximos, pues lo pueden por un diámetro.

Cor. 2. Por dos puntos de la esfera que no son opuestos solo puede pasar un círculo máximo, pues estos y el centro de la esfera determinan solo un plano secante.

Teor. 3. [fig. 63]. La distancia mas corta entre dos puntos sobre la superficie esférica la mide el arco del círculo máximo.

Dem. Siendo D y E los puntos de la esfera y DME el arco del círculo mayor, demos al otro arco cualquier DNE y á su ángulo de centro en C una vuelta al rededor de la cuerda comun hasta que los dos arcos estén en el mismo plano. Con esto el centro C del círculo menor quedará dentro de DMEO, pues su radio es menor que el de la esfera [teor. 1 cor. 2], ademas por la misma razon estará el arco correspondiente DNE fuera de DME y por tanto es mayor que este.

Cor. 1. La distancia esférica entre dos puntos opuestos de la esfera es una semicircunferencia máxima [teor. 2].

Cor. 2. El polo de un círculo tiene igual distancia esférica del todos los puntos de la circunferencia respectiva; pues poniendo por el polo dos círculos máximos cualesquiera, serán iguales las cuerdas trazadas desde el polo hasta su circunferencia [teor. 1, cor. 3], luego lo serán tambien los arcos correspondientes, pero estos son los de los círculos máximos y por tanto lo son las distancias esféricas.

Cor. 3. El polo de un círculo máximo dista de su circunferencia respectiva un cuadrante del círculo máximo ó 90°.

Cor. 4. Puede imaginarse que una circunferencia se engendra en la esfera por una vuelta de una distancia esférica al rededor de un punto; el punto será el polo de la circunferencia engendrada, Así en la fig. 62 la circunferencia cuyo centro es C está engendrada por la distancia esférica PF y la circunferencia cuyo centro es O por la distancia esférica PG ó por un arco de 90°.

De donde es que el polo de una circunferencia de la esfera se llama su centro esférico.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 4. [fig. 64]. Cuatro puntos que no están en un plano determinan la posicion de una esfera.

Dem. Siendo A, B, D, E los puntos, formemos dos triángulos ABD y ABC cuyos centros C y C′ se determinan trazando desde los puntos medios de los lados respectivos perpendiculares [Pl. § 18, probl. 3]. Ahora levantando en los puntos C y C′ las rectas CN y C′M perpendiculares á los triángulos respectivos digo, que estas se cortan; pues el plano CFC′ es perpendicular á la arista AB, por ser ∢CFC′ el rectilíneo del diedro DABE [I, 21 cor. 5], y por tanto la CN está en el plano CFC′ y lo mismo C′M [I, 21 cor. 2], luego estas dos rectas están en el mismo plano y por consiguiente se cortarán.

Ya sabemos que todas las superficies esféricas que pasan por ABD tienen su centro en la perpendicular CN [teor, 1, cor. 1], del mismo modo todas las que pasan por ABC tienen su centro en C′M.

Luego si una superficie esférica pasa al mismo tiempo por los cuatro puntos, tendrá su centro solo en el punto comun O de las dos perpendiculares.

En efecto, pasará una por los cuatro puntos, pues

$$OA=OB=OE \quad [I, 7 \text{ cor. } 4]$$

y $$OA=OB=OD$$

ó $$OA=OB=OC=OD.$$

Luego los cuatro puntos determinan una esfera, pues solo es posible un centro.

Cor. La construccion hecha resuelve el problema, encontrar el centro de una esfera dada.

Teor. 5. Si un plano es perpendicular á un radio de una esfera en su punto estremo, no tendrá mas puntos comunes con la esfera y por tanto es tangente.

Dem. La distancia entre todos los otros puntos del plano y el centro de la esfera es mayor que el radio [I, teor. 7 cor. 3], luego están fuera de la esfera, y por tanto tiene el plano solo un punto comun con la esfera.

Cor. Lo mismo vale de una recta bajo la misma condicion, pues la razon no es diferente.

Teor. 6. La interseccion de dos esferas es un círculo.

Dem. Hagamos pasar por los dos centros un plano y tendremos la seccion de la fig. 65; dando ahora á los dos círculos secantes una vuelta al rededor de la central, los dos círculos describen cabalmente las dos esferas, y la perpendicular AP una circunferencia comun á estas.

Cor. El círculo comun es perpendicular á la central por serlo AP.

Nota. La fig. 65 manifiesta que las relaciones entre dos esferas son las mismas que entre dos círculos. [Véase Pl. § 17].

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

§ 17. HUSO ESFÉRICO Y TRIÁNGULO ESFÉRICO.

Explicaciones.

1ª Se llama huso esférico la porcion de superficie esférica comprendido entre dos simicircunferencias máximas secantes fig. 66 AEBFA.

Lados de un huso esférico son los arcos, y ángulos las aperturas entre dos arcos de círculos máximos, y se llaman ángulos esféricos.

2ª El ángulo que forman entre sí dos curvas se entiende ser el mismo que el rectilíneo que forman entre sí los dos tangentes en el punto de seccion, y por tanto para determinar un ángulo esférico se necesita trazar las tangentes á los arcos respectivos. Siendo [fig. 66] AC y AD las tangentes á los arcos AEB y AFB será $\sphericalangle$CAD el que forman entre sí dichos arcos.

Trazando ahora en el plano AEBOA la recta OE | AB y en el plano AFBOA la recta OF | AB sabemos que $\sphericalangle$EOF es el rectilíneo del ángulo plano EABF [§ 6 expl. 5]. Ademas se ve que OF y AD están en el mismo plano del semicírculo AFB, pues AD es la tangente al arco BFA en el punto A segun la construccion; por la misma razon AC y OE están en el mismo plano del semicírculo BEA; por consiguiente tenemos:

AC ǂ OE y en el mismo sentido
AD ǂ OF „ „
luego $\sphericalangle$CAD=EOF.

Ya sabemos que $\sphericalangle$CAD es el ángulo rectilíneo del esférico FAF y $\sphericalangle$EOF el del diedro FABE, luego podemos tomar un ángulo diedro por su correspondiente esférico, ó podemos decir el ángulo esférico es el diedro que forman los planos de los círculos máximos correspondientes.

De donde tenemos una importante consecuencia, á saber; lo dicho de los ángulos diedros se aplica á los esféricos.

3ª Para medir un ángulo esférico basta medir el ángulo rectilíneo CAD ó mejor el $\sphericalangle$EOF, pero tenemos la medida del ángulo EOF haciendo pasar por E y F un círculo máximo, y por tanto el arco EF es la medida del $\sphericalangle$EOF ó del ángulo esférico EAF.

Si pues podemos construir el arco EF sin la construccion del $\sphericalangle$EOF tenemos una medida mas inmediata. Vamos á ver:

$\sphericalangle$AOF=R y $\sphericalangle$AOE=R [constr.]
luego arc. AF=90° y AE=90°

Por consiguiente basta para formar el arco EF tomar desde el vértice A un arc. AE=90° y AF=90° y la distancia esférica entre E y F será la medida del ángulo esférico A. De donde en general: *Para medir un ángulo esférico se describe desde el vertice como polo con un radío igual á 90° un arco que una los dos lados del ángulo esférico, y este será su medida.*

Cor. 1. Dos círculos máximos secantes forman en los dos puntos de interseccion ángulos iguales, á saber: [fig. 66] $\sphericalangle$FAE=$\sphericalangle$FBE, pues tienen por medida el mismo arc. EF.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Cor. 2. El círculo máximo que pasa por el polo del otro forma con él un ángulo recto esférico, á saber:
fig. 66 $\sphericalangle AFE = R$, pues el plano EFO es perpendicular al plano AFB [I, 21].

5ª Por ser iguales segun su medida los ángulos esféricos y sus respectivos diedros, podemos inmediatamente aplicar á los ángulos esféricos las propiedades de los diedros, á saber:

a. Los ángulos rectos esféricos son iguales.

b. La suma de los ángulos adyacentes esféricos es igual á dos rectos.

c. La suma de todos los ángulos esféricos al rededor de un punto es igual á cuatro rectos.

d. Si dos ángulos esféricos son iguales lo serán tambien sus ángulos respectivamente adyacentes.

e. Los ángulos esféricos opuestos por el vértice son iguales.

f. En un punto de un arco solo se puede levantar un arco perpendicular al otro.

6ª Se llama triángulo esférico la porcion de superficie esférica totalmente limitada por tres arcos del círculo máximo, ABC [fig. 67]. Como se ve en la figura, tres círculos máximos forman ocho triángulos esféricos

ABC
ABF | DCE
ACE | DBF
BCD | EAF
DEF

Los triángulos ABC y DEF se llaman opuestos, pues los vértices respectivos son puntos opuestos de la esfera.

Los lados de un triángulo esférico y sus ángulos se pueden espresar por grados.

7ª Uniendo en la fig. 67 los vértices A, B, C del triángulo esférico con el centro de la esfera tendremos un ángulo sólido, que está representado separadamente por la fig. 68.

El ángulo B tiene la misma medida que el diedro COBA, lo que vale tambien de los otros, ademas la medida de los ángulos planos BOC, BOA, COA son los arcos respectivos BC, BA, CA por ser $BO = CO = AO$ y por tanto todo el ángulo triedro está representado por un triángulo esférico; y como tenemos ángulos triedros congruentes y simétricos, por la misma razon tendremos triángulos esféricos congruentes y simétricos. En la fig. 66 los triángulos opuestos ABC y DEF son simétricos, pues tienen todos sus partes iguales pero en órden inverso.

Cor. Los dos planos que pasan [fig. 67] por los puntos A, B, C y D, E, F son paralelos, pues lo son las rectas BC y EF, BA y ED.

8ª Esta correspondencia entre los ángulos driedros y triángulos esféricos es la razon porque las propiedades de los triedros pueden inmediatamente aplicarse á los triángulos esféricos, á saber:

a. En todo triángulo esférico la suma de dos lados es mayor que el tercero, y la diferencia menor.

b. La suma de todos los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

c. La suma de todos los ángulos esféricos de un triángulo esférico es menor que seis, pero mayor que dos rectos.

d. En un triángulo esférico se oponen

1º á lados iguales ángulos iguales,
2º á ángulos iguales lados iguales,
3º á mayor lado mayor ángulo,
4º á mayor ángulo mayor lado.

e. Dos triángulos esféricos son congruentes ó simétricos si tienen respectivamente iguales

1º dos lados y el ángulo comprendido,
2º dos ángulos y el lado comprendido,
3º tres lados,
4º tres ángulos.

9ª Como hay ángulos triedros suplementarios ó polares, así hay triángulos esféricos polares; y por tanto dos triángulos esféricos son polares si los lados del uno son arcos suplementarios de los ángulos correspondientes del otro.

Para formar el ángulo esférico polar á otro dado ABC [fig. 69] descríbase en la esfera desde A, B, C como polos por un radio igual á 90° arcos que se corten en los puntos D, E, F y será el $\triangle$DEF el polar al dado é inversamente.

Demost. Prolongando los lados del $\triangle$ABC hasta que corten á los del otro, demostremos

1º que D, F, E son los polos de los lados del triángulo dado.

Por ser A el polo del arco DE, el punto D dista de A 90° y por ser B el polo del arco DF el punto D dista del punto B 90°, luego el punto D es el polo del arco AB, de la misma manera se demuestra que E es el polo del arco AC y F el de CB.

2º Demostremos que son triángulos suplementrrios. Por ser JH la medida de A, tenemos

$$\sphericalangle A+DE=JH+DE=DH+EJ$$

por ser $DH=90°$ y $EJ=90°$

se sigue que $\sphericalangle A+DE=180°$.

De la misma manera se demuestra que

$$B+DF=180°, \text{ y } C+EF=180°.$$

El fundamento de esta demostracion es que los vértices de un triángulo son los polos de los lados del otro, luego podemos concluir que tambien

$$\sphericalangle F+BC=180°, \quad E+AC=180°, \quad D+AB=180°.$$

Teor. 7. Dos husos esféricos de igual ángulo esférico son congruentes.

Dem. Por ser los lados semicircunferencias máximas de la misma esfera y los ángulos por hipót. iguales entre sí, los husos sobrepuestos deben coincidir.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Teor. 8. El área de un huso esférico es á la de la esfera, como los grados del ángulo esférico son á 360°.

Dem. Dividiendo el círculo máximo cuyo polo es el vértice del huso en 360 grados principiando del punto de interseccion de un lado del huso, y trazando por dicho vértice y demas puntos de division círculos máximos, la superficie de la esfera queda dividida en 360° partes iguales (teor. 7), luego el huso es tanta parte de la superficie de la esfera cuantos grados tiene, y por tanto la superficie del huso es á la de la esfera como los grados de aquello son á 360°.

Nota. Si el ángulo del huso está espresado en partes mas pequeñas, se puede tambien dividir toda la esfera segun estas partes.

Teor. 9 [fig. 70]. Si un arco es perpendicular á otro en su punto medio, los puntos estremos de aquello equidistan de cualquier punto de la perpendicular.

Hip. $AC=BC$ y $MC \perp AB$.
Tes. $AP=BP$.

Dem. Los triángulos esféricos PCA y PCB tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, luego tambien todas las otras partes, á saber, $\sphericalangle A=\sphericalangle B$ y $AP=BP$.

Teor. 10 [fig. 71]. El punto en donde se cortan dos perpendiculares levantadas desde los puntos medios de dos lados de un triángulo esférico, equidistan de los tres vértices.

Hip. $EO \perp CB$, $DO \perp AC$, $AD=DC$, $BE=EC$.
Tes. $OA=OC=OB$.

Dem. $CO=OB$ [teor. 9].
$CO=OA$ „
luego $CO=OB=OA$.

Cor. 1. Desde el punto O como centro esférico se puede circunscribir un círculo al triángulo, de donde el punto O es el polo de dicho círculo.

Cor. 2. fig. 67. El triángulo esférico ABC y el triángulo plano ABC tienen el mismo círculo circunscrito, y por tanto la recta que une los dos centros pasa por el centro y es perpendicular al plano ABC [Teor. 1. Expl.]

Lo mismo se verifica relativamente al triángulo esférico opuesto DEF, ademas por ser simétricos los dos triángulos esféricos los planos serán congruentes y por tanto sus círculos circunscritos serán iguales.

Sabemos que los planos ABC y DEF son paralelos [§ 15. Expl. 7ª Cor.]; por consiguiente los centros esféricos de los triángulos esféricos opuestos están con el centro de la esfera en la misma recta, ò los dos son puntos opuestos de la esfera.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Ahora bien, cualquier punto dentro del triángulo esférico ABC tiene un punto opuesto dentro del triángulo opuesto; porque un punto dentro del triángulo esférico ABC debe tener su opuesto á los lados opuestos de los círculos máximos, cuyos arcos forman el triángulo, y por tanto solo resta para el punto opuesto la sperficie del triángulo esférico opuesto DEF.

Con todo lo dicho tenemos la conclusion:

Los radios de los círculos circunscritos á dos triángulos esféricos opuestos son iguales, y si el centro del uno es interior lo será tambien el del otro.

Lo que vale de los triángulos opuestos valdrá de los simétricos en general, pues el simétrico á uno es congruente con su opuesto.

Teor. 11 [fig. 72]. Dos triángulos simétricos tienen igual área.

Hip. $\triangle ABC$ y $A'B'C'$ son simétricos y OO' sus centros.
Tes. $\triangle ABC = A'B'C'$.

Dem. Unidos los centros con los vértices tenemos

$$\triangle AOB \cong A'O'B' \quad [\text{§ 15, expl. } 8^a]$$
$$\triangle BOC \cong B'O'C'$$
$$\triangle COA \cong C'O'A'$$

luego $\triangle AOB + BOC + COA = A'O'B' + B'O'C' + C'O'A'$

ó $\triangle ABC = A'B'C'$.

Teor. 12 [fig. 67]. El área de un triángulo esférico es á la de la esfera como su exceso esférico á 8 rectas.

Nota. Exceso esférico de un triángulo se llama la suma de tres ángulos disminuida en dos rectas y se denota por E.

Dem. Siendo S el área de la esfera, tenemos:

$$\triangle ABC + BCD : S = \sphericalangle A : 4R \quad [\text{teor. } 8]$$
$$\triangle ABC + ABF : S = \sphericalangle C : 4R$$
$$\triangle ABC + FBD : S = \sphericalangle B : 4R \quad [\text{por ser } ABC = DEF]$$

luego $3ABC + BCD + ABF + FBD : S = A + B + C : 4R$

pero es $ABC + BCD + DBF + ABF = \frac{1}{2}S$

luego $2ABC + \frac{1}{2}S : \frac{1}{2}S = A + B + C : 2R$

” $2ABC : \frac{1}{2}S = A + B + C - 2R : 2R$

y por tanto $ABC : S = E : 8R$.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

§ 18. ÁREAS Y VOLÚMENES DE LA ESFERA Y SUS PARTES.

Explicaciones.

1ª Se llama zona esférica la porcion de superficie esférica comprendida entre dos círculos paralelos, JKLM [fig. 62].

2ª Se llama casquete esférico la porcion de superficie esférica originada por una seccion cualquiera, LMP′ [fig. 62].

3ª Las bases de una zona son las dos secciones paralelas, y altura la distancia entre estos ó la recta que une los centros, C′C″ [fig. 62).

4ª La base de un casquete es la seccion y la perpendicular en el centro limitado por la superficie esfèrica, C″P′ [fig. 62].

Nota P′ es el punto medio.

5ª Segmento esférico es la parte de la esfera limitada por un casquete y su bazo, JKQNC′P′.

6ª Sector esférico es la parte de la esfera limitada por un casquete y la superficie cónica, cuya base es la del casquete y el vértice el centro de la esfera.

7ª Corte esférico es la parte de la esfera comprendida entre una zona y sus bases.

Teor. 13 [fig. 73]. El área de la esfera es igual al producto de su diámetro por la circunferencia de un círculo máximo, á saber

$$S=2rC=4\pi r^2$$

Dem. Siendo AC, CD &a. los lados de un polígono regular de número par de lados y $CE \perp AB$, $DF \perp AB$ &a, hagamos girar el círculo al rededor del diámetro AB y tendremos una esfera, é inscrita en esta un cuerpo compuesto de dos conos y muchos conos truncados.

El área lateral de un cono truncado cuyo lado es CD se espresa siendo $CG=GD$ y $GH \ddagger DF$.

$$s=2\pi CD.GH \quad [III, 7].$$

Trazando $CK \perp DF$ será

$$\sphericalangle DCK=OGH \quad \text{por ser } OG \perp DC$$

luego $\triangle DCK \sim OGH$

de donde $OG:GH=DC:CK=DC:EF$

luego $OG.EF=GH.DC$

y por tanto $s=2\pi OG.EF.$

Por la misma razon tenemos para el cono cuyo lado es CA

$$s'=2\pi OG'.AE$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

La recta $OG=OG'$ es el apotema $[\rho]$ del polígono regular y por tanto la misma para todos los conos truncados, ademas EF es la altura $[h]$, luego la fórmula

$$s=2\pi\rho h$$

expresa el área lateral de cada uno de los troncos y conos.

Ahora bien añadiendo todas las áreas parciales tendremos el área lateral del cuerpo inscrito:

$$S'=2\pi\rho(h_1+h_2+h_3+\ldots.)$$

pero es $$AB=h_1+h_2+h_3+$$

de donde $$S'=2\pi\rho . AB.$$

Esta espresion se verifica siempre cualquiera que sea el número de los lados, luego lo será tambien indefinidamente duplicando los lados, pero eso supuesto el área del cuerpo inscrito se aproximamas y mas á la esfera, y por tanto podemos aplicar el teorema de los límites:

$$\lim. S'=S$$
$$\lim. 2\pi\rho AB=2\pi r AB$$

y siempre es $$S'=2\pi\rho AB$$

luego $$S=2\pi r AB=2r.C=4\pi r^2$$

Cor. 1. El área de la esfera es el cuádruplo de la del círculo máximo.

Cor. 2. El área de la esfera es igual al área lateral de un cilindro cuya base es el círculo máximo y la altura igual al diámetro.

Cor. 3. Las áreas de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios

$$S:S_{,}=4\pi r^2:4\pi r_{,}^2=r^2:r_{,}^2$$

Teor. 14. El área de una zona ó casquete esférica es igual al producto del círculo máximo por la altura respectiva, á saber

$$S=C.h=2\pi rh$$

Dem. Duplicando indefinidamente los lados, la suma de las áreas laterales de los conos truncados entre EC y FD [fig. 73] tiene por límite el área lateral de la zona descrita por el arco CD, y por lo mismo la suma de las áreas laterales entre A y CE tiene por límite el área lateral del casquete descrito por el arco AC; por consiguiente aplicando el teorema de los límites, tendremos

$$S=C.h=2\pi rh.$$

Teor. 15. El volúmen de la esfera es igual al producto de su área por el tercio del radio, á saber

$$V=\tfrac{1}{3}r.S=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. Tomando en la superficie de la esfera muchos puntos y muy contiguos, y haciendo pasar por estos, planos tangentes, veremos que los planos inmediatos pronto se cortan, pues sus respectivos perpendiculares están muy próximos. De donde se ve que todos estos planos forman un poliedro no muy distante de la esfera.

Para determinar el volúmen del poliedro, basta unir todos sus vértices con el centro, y quedará descompuesto en pirámides, que tienen por altura el radio de la esfera, por ser todos los planos tangentes. Siendo V′ el volúmen, S′ el área del poliedro tendremos

$$V'=\tfrac{1}{3}rS'$$

Doblando indefinidamente el número de puntos se sigue que el volúmen del poliedro se aproximará mas y mas al de la esfera, y por tanto podemos aplicar el teorema de los límites.

$$\lim V'=V,\quad \lim \tfrac{1}{3}r.S'=\tfrac{1}{3}rS$$

y por ser siempre $V'=\tfrac{1}{3}rS'$

será $V=\tfrac{1}{3}rS=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$

Cor. 1. Una esfera es igual á la pirámide que tiene por base el área de la esfera y por altura el radio.

Cor. 2, Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios

$$V:V_{,}=\tfrac{4}{3}\pi r^3:\tfrac{4}{3}\pi r_{,}^3=r^3:r_{,}^3$$

Cor. 3. Si un cilindro y cono tienen por bases círculos máximos de una esfera y por altura el diámetro de esta, están el cilindro, la esfera y cono entre sí como 3:2:1 [de Arquímedes].

$$V_c:V_e:V_p=2\pi r^3:\tfrac{4}{3}\pi r^3:\tfrac{2}{3}\pi r^3=3:2:1.$$

Teor. 16. El volúmen de un sector esférico es igual al producto de su base por el tercio del radio; á saber

$$V=S\tfrac{1}{3}r=\tfrac{2}{3}\pi r^2h.$$

Dem. La suma de las pirámides cuya suma de bases tiene por límite el casquete del sector, tendrá tambien por límite el volúmen del sector correspondiente, y por tanto concluiremos como para la esfera:

$$V=\tfrac{1}{3}Sr=\tfrac{2}{3}\pi r^2h.$$

Teor. 17. [fig. 74]. El volúmen de un segmento esférico siendo h su altura [CP] y r el radio de la esfera se expresa por la fórmula

$$V=\tfrac{1}{3}\pi[3r-h]h^2.$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Dem. El volúmen del segmento ADBEP es igual á la diferencia entre el sector y cono correspondiente, y por tanto

$$
\begin{aligned}
V &= \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}[r-h]\pi CB^2 \\
&= \tfrac{1}{3}\pi(2r^2h - [r-h][r^2-[r-h]^2) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi[2r^2h - [r-h][r^2-r^2+2rh-h^2] \\
&= \tfrac{1}{3}\pi[2r^2h - 2r^2h + 2rh^2 + rh^2 - h^3] \\
&= \tfrac{1}{3}\pi[3rh^2 - h^3] \\
&= \tfrac{1}{3}\pi[3r-h]h^2.
\end{aligned}
$$

Teor. 18. [fig. 74]. El volùmen de un corte esférico siendo r_1 el radio de la base mayor, r_2 el de la menor y d la distancia entre estas, se expresa por la fórmula

$$V = \pi d\left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \tfrac{1}{6}d^2\right]$$

El volúmen es igual á la diferencia entre dos segmentos y por tanto se puede aplicar la fórmula del teor. 17.

Siendo $a = OC_1$ y $b = OC_2$ será $O_1P' = r-a$ y $C_2P^1 = r-b$, lo que si aplicamos á la fórmula del teor. 17 tendremos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi[(2r+a)(r-a)^2 - (2r+b)(r-b)^2]$$

Ejecutando las operaciones indicadas se saca

$$V = \tfrac{1}{3}\pi[a^3 - b^3 + 3r^2(b-a)]$$

de donde sabiendo que $a^3 - b^3 = [a-b][a^2+ab+b^2]$ y $b-a=d$

tendremos $\quad V = \tfrac{1}{3}\pi d[3r^2 - (a^2+b^2+ab)]$

Poniendo una vez $\quad ab = a[a+d]$
otra vez $\quad ab = b[b-d]$

tendremos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi d[3r^2 - a^2 - b^2 - a^2 - ad]$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi d[3r^2 - a^2 - b^2 - b^2 + bd]$$

$$2V = \tfrac{1}{3}\pi d[6r^2 - 3a^2 - 3b^2 + d^2]$$

por ser $\quad r_1^2 = r^2 - a^2$ y $r_2^2 = r^2 - b^2$

será $\quad 2V = \tfrac{1}{3}\pi d[3r_1^2 + 3r_2^2 + d^2]$

ó $\quad V = \pi d\left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \tfrac{1}{6}d^2\right]$

Cor. Considerando al segmento esférico como un corte cuyo radio de la base superior es igual a' cero, tendremos siendo $r_2 = o$ y $d = h$

$$Vs = \pi h\left(\frac{r_1^2}{2} + \tfrac{1}{6}h^2\right)$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

o $Vs=\frac{1}{2}\pi h[r_1{}^2+\frac{1}{3}h^2]$

Teor. 19. El área de un huso esférico cuyo $\sphericalangle=\alpha^\circ$ se espresa

$$S=\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi r^2$$

Dem. $S:4\pi r^2=\alpha:4.90^\circ$

luego $$S=\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi r^2$$

Cor. El volúmen correspondiente es igual á $\frac{\alpha^\circ}{270^\circ}.\pi r^3$.

Teor. 20. El área de un triángulo esférico cuyo exceso es E° se espresa

$$\triangle=\frac{E^\circ}{180}\pi r^2$$

Dem. $\triangle:4\pi r^2=E^\circ:8.90^\circ$ (teor. 12)

luego $$\triangle=\frac{E^\circ}{180^\circ}.\pi r^2$$

El volùmen correcspondiente de una pirámide esférica es igual á

$$\frac{E^\circ}{540^\circ}.\pi r^3.$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

CAPITULO V.

Ejercicios prácticos.

ADVERTENCIA.

1ª En los problemas siguientes se denota metro por M, decímetro por Dm, centímetro por Ctm, gramo por gr, kilógramo por kilgr.

2ª Los números que pertenecen al mismo problema se pueden fácilmente distinguir, por ejemplo, en el probl. 9º 2 y 15, 3 y 8 &a. son números relativos del mismo problema numérico.

§ 19. CUBO.

1º Siendo la arista de un cubo igual á b se pregunta cuál es su diagonal, área y volúmen?

b=7,5 2,35 7,28 3,67 1,369 2,809

2º Siendo la diagonal de la base de un cubo igual á d se pregunta cual es su área y su volúmen?

d=3,5 4,67 2,8 4,3 53,75

3º Siendo la diagonal de un cubo igual á d se pregunta cual es su arista, área y volúmen?

d=6 3,45 3,666 48,5 1,6

4º Siendo la suma de la arista y de la diagonal de un cubo igual á s se pregunta cuál es su área y volúmen?

s=6,79 5,83 7,25 79,75 68,25

5º Siendo el área de un cubo igual á c se pregunta cuál es su arista, diagonal y volúmen?

c=3174 100 189 2000 110,94

6º Siendo q el plano de un cubo se pregunta cuál es su volúmen?

q=2000 189 362,73 6137,75

7º Siendo el área de un cubo n veces mayor que la del plano diagonal de otro cubo cuya arista es igual á b se pregunta cual es el volúmen del primero.

n=3	2,5	$\frac{7}{8}$	$\frac{2}{3}$	2
b=2,3	3,45	1,87	2,25	548

8º Siendo el volúmen de un cubo igual á v se pregunta cual,

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

es su arista, diagonal y área.

v=103823   100   1500   1524   2500

9º Cual es la arista de un cubo cuyo volúmen es n veces mayor que el de otro cuya arista es igual á b

n=2	3	2,5	1,5	0,75
b=15	8	3,7	4,3	24,5

10. Cual es la arista de un cubo cuyo volúmen es igual á la suma de otros tres cubos cuyas aristas son a, b, c

a=2,5	2,3	3,5	2,25	4,1
b=4,1	3,9	4,7	3,75	5,5
c=5	4,7	7,8	4,5633	9,2

11. Determinar la arista de un cubo cuyo volúmen sea igual á la diferencia de otros dos cuyas aristas son a y b

a=4,7	6,9	3,57	55	6,75	499
b=3,2	4,3	2,16	38	4,26	306.

12. Descomponer un cubo de arista b en otros dos cuyos volúmenes formen la razon m:n

b=3,2	4,7	1,65	3,8	5,5	209
m=2	3	5	2	3	5
n=3	4	7	3	4	7

13. Cual es el peso de un cubo cuya arista es b y cuya materia es de un peso específico s

b=2,7	1,73	2,79	2,345	31
s=2,67	11,357	7,207	11,352	2,67

14. Determinar la arista de un cubo cuyo peso sea igual á p de una materia de peso específico s

p=25gr	500gr	100gr
s=8,395	8,788	22,1

15. Determinar la arista de un cubo de una materia de peso específico s' tal que pesa n veces mas que otro cubo de una materia de peso específico s y cuya arista es a.

s'=7,203	8,788	2,63	0,797
n=3	6	2,5	$\frac{5}{8}$
a=5,7Ctm	6,8	4,4Ctm	2,75
s=11,32	0,567	7,21	2,743

16. Cuanto pesa un cubo vacio de una materia de peso específico s, si la arista exterior es igual á b y el grueso de la cubierta es igual á c.

s=8,788	8,395	7,735	0,537
b=5Ctm	5Ctm	10,8Ctm	38,4Ctm
c=2Mm	1Mm	1,25Mm	16Mm

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

17 Cuanto pesa un cubo vacio de una materia de peso específico s, si la arista interior es igual á b y el grueso de la cubierta es igual á c.

s=7,783	8,21	0,57	8,78
b=12,5Ctm	10,8Ctm	2,9Ctm	4.4Ctm
c=1,4Mm	1,5Mm	1Mm	7,5Mm

*18. Determinar la arista exterior de un cubo vacio de la materia de peso específico s de modo que su grueso sea c y su peso p.

s=6,861	7,763	0.543	8,235
c=2,5Mm	1,5Mm	15Mm	0,375 Mm
p=1000 gr.	1 kilgr.	15,5 kilgr.	10 gr.

§ 20. PARALELEPÍPEDO.

19. Siendo las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo a b, c, se pregunta cual es su diagonal, su área y su volúmen

a=2,7	4	7,8	6,2	108,3
b=2,8	7,5	5,6	5,4	23,4
c=3,6	13,2	3,2	3,9	1,5

20. Siendo el volúmen de un paralelepípedo rectángulo igual á v y las dos aristas de su base iguales á b y c, se pregunta cual es su diagonal y área.

b=8	5,6	2,3	3,45	43
c=9	7,2	3,7	4.56	53
v=864	217,728	60	75	106365

21. Siendo las dos aristas de la base de un paralelepípedo rectángulo iguales á b y c y ademas su diagonal igual á d, se pregunta cual es su área y volúmen.

b=2,4	4,8	28,8	28,25
c=2,7	4,4	16,8	20,75
d=5,1	7,3	33,7	37,166.

22. Siendo las dos aristas de la base de un paralelepípedo rectángulo a y b y su área igual á q se pregunta cual es su volúmen.

a=4,7	73	118
b=5,3	89	158
q=183,82	44422	84760.

23. Siendo dos aristas de un paralelepípedo rectángulo igual á b y c, encontrar la tercera arista de modo que el volúmen tenga tantas unidades cuantas de área tiene la superficie total

b=8	23	43	87
c=14	47	53	141

* El asterisco puesto ántes de un problema denota que este se resuelve por una ecuacion mista de 2.° grado.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

24. Siendo la latitud de un paralelepípedo rectángulo m veces mayor que su altura y su longitud n veces mayor que su latitud, se pregunta cuales son sus aristas, si su volúmen es v.

m=3	1,5	1,5	2,25
n =2	3	2,5	1,5
v =1700	100	100	60,48.

25. Las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo son entre sí como m:n:p, se pregunta cual es su diagonal y área, si el volúmen es igual á v

v =6,912	110,25	12966390	100
m=8	12	3	1
n =9	21	4	2
p =12	28	5	3.

26. Las tres caras de un paralelepípedo rectángulo que concurren en un vértice, son iguales á q′, q″, q‴, se pregunta cual es el volùmen de aquel

q′ =8,93	9,75	726,76	985,56
q″ =13,87	14,25	812,92	1331,36
q‴=34,31	30,50	1487,32	1158,46.

27. Siendo las tres diagonales de las caras de un paralelepípedo rectángulo iguales á a, b, c, se pregunta cual es su área y volúmen

a=2,3	3,47	27	47,5
b=3,4	4,93	40	68,7
c=3,9	5,74	45	70,8.

28. Siendo el volúmen de un paralelepípedo rectángulo igual á v encontrar su área, si la base es un cuadrado igual á la suma de las dos caras que concurren con ella en el mismo vértice

v=100	1728	821,516	1556,068.

29. Si la base de un prisma recto es un cuadrado de lado a, se pregunta cual es su altura y diagonal si el volúmen es v

a=6,6	6,7	78	79
v=457,38	457	918684	915840.

30. La base de un prisma recto es un cuadrado de lado a, su altura es b, se pregunta cual es su diagonal, área y volúmen

a=1,8	2,57	3,83	44	88
b=2.1	3,83	2,57	82	89.

31. Siendo el área de un prisma cuadrangular y regular igual á q y la arista de la base igual á b, se pregunta cual es su volúmen

q=64,86	100	15222	93,02
b=2,3	2,34	43	2,7

32. Siendo la diagonal de un prisma cuadrangular y regular

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

igual á *d* y la arista de la base igual á *b*, se pregunta cual es su área y volúmen

d=17,8	29	257	2,3
b=8,8	12	120	1,1.

33. Siendo la diagonal do un prisma cuadrangular y regular igual á *d* y su altura igual á *c*, se pregunta cual es su área y volúmen

d=11,3	12	32,1	11,25
c=4,9	5	25,7	4,75

*34. Siendo la altura de un prisma cuadrangular y regular igual á *c* y su área igual á *q*, se pregunta cual es su volúmen

c=4,8	4,1	49	5,6
q=69,44	62,16	8944	99,80

*35. Siendo el área de un prisma cuadrangular y regular igual á *q* y su altura de *b* unidades de longitud mayor que la arista de la base, se pregunta cual es su volúmen.

q=53,82	2,8728	64	6000
b=2,4	0,17	6	10.

*36. Siendo la altura de un prisma cuadrangular y regular igual á *c* y su diagonal de *b* unidades de longitud mayor que la arista de la base, se pregunta cual es su área y volúmen

c=2,71	1,61	21,7	3,73
b=2,05	1,11	15,7	2,93.

37. Siendo *v* el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, *d* su diagonal y *a* una arista, se pregunta cual es su área.

v=23,936	60	425,25	67
a=1,7	2,9	6,75	2,75
d=5,7	7,3	13,25	7,25

*38. Siendo el área de un paralelepípedo rectángulo igual á *q*, su volúmen *v* y una arista igual á *b*, se pregunta cual es su diagonal.

q=49,68	50	147	144
v=23,328	25	100,25	100
b=2,4	2,3	3	3

39. Siendo el área de un paralelepípedo rectángulo igual á *q*, su altura *a* y el perímetro de la base igual á *s*, se pregunta cual es su volúmen.

q=76,5	2,2194	411,34	109,94
a=4,2	0,93	11,1	5,0
s=11,2	2,2	31,2	13,4.

*40. Siendo *d* la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, su base *g* y su área *q*, se pregunta cual es su volúmen.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

d=1,7	19	11,75
g=0,82	117,33	35,194
q=3,6	432,916	170,33:

*41. Siendo *v* el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, su área *q* y el perímetro de su base igual á *s*, se pregunta cual es su diagonal:

v=56.448	0,126	126
q=94;08	1,08	152
s=11,2	1,04	18,33

*42. Siendo el área de un paralelepípedo rectángulo igual á *q* su diagonal *d* y una arista igual á b, se pregunta cual es su volúmen:

q=15	5	150	804,42
d=3.8	2;5	9,5	35,5
b=2,9	0;4166	2,4332	0;4266

43. Siendo *a, b, c* las aristas exteriores de un paralelepípedo rectángulo vacío, cuya cubierta tiene el grueso *d*; se pregunta cual es el volúmen de la cubierta.

a=9;7	13,7	20	25,6
b=7,3	15;9	15	20,6
c=5,9	17,3	9	16,5
d=0,1	0,85	0;666	1;5

44. Siendo *v* el volúmen y *d* el grueso de la cubierta de un paralelepípedo rectángulo vacío, se pregunta cual es la suma de sus tres aristas si *q* es su área:

d=1,5	0,25	1	2
v=1737	3,51	2922	7972
q=1442	18,04	0194	4642

45. Siendo *a, b, c* las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo cuya materia tiene un peso específico igual á *s*, se pregunta cual es el peso del todo:

a=3 Ctm:	23,5 Ctm:	41 Ctm.	4;5 Ctm.
b=3 Ctm.	10Ctm.	81 Ctm:	1;7 Ctm:
c=5 Mm.	5,5 Ctm.	6,6 Mm	0,66 Mm.
s=7,207	1,961	8,788	7;207

46. Siendo *a* la longitud de una barra, *b* su ancho y *p* su peso; se pregunta cual es su grueso, si el peso específico es *s*.

s=8,788	7,788	8;75	8,395
a=25 Ctm.	37 Ctm:	25 Ctm:	21 Ctm.
b=13 Ctm.	132 Mm:	3,5 Mm	1 Mm.
p=475 gr.	300 gr.	4,09375 klgr.	0,5 klgr.

47. Un paralelepípedo rectángulo de una longitud *c* cuya materia tiene el peso específico *s*, ha de pesar *p* klgr, se pregunta cual debe ser el lado de la base cuadrada.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

s=0,934	7,788	2,673
c=9,75Mt	1,44Mt	12,6Dm
p=3885,6Klgr	52Klgr	300 Kilgr.

48. Un paralelepípedo rectángulo, cuya materia tiene el peso específico *s*, ha de pesar *p* klgr. con tal que su ancho sea *m* veces mayor que la altura, y su largo *n* veces mayor que el ancho.

s =8,37	7,207	7,207	11,345
m=3	1	4	5
n =2,5	2	1,5	1,5
p =200 gr.	200 kilgr.	1000 kilgr.	27,50. kilgr.

49. Siendo *a*, *b*, *c* las aristas exteriores de un paralelepípedo rectángulo vacío y *d* el grueso de la cubierta, se pregunta cual es su peso, si la materia tiene el peso específico *s*.

a=97,875 Ctm	147,5 Ctm	19,42Ctm	18,41 Ctm.
b=39,150 Ctm	46 „	6,50 „	13 „
c=29,100	37 „	4,92 „	7,5 „
d=1 Ctm	2,5 „	1,25 „	0,75 „
s=0,555	0,553	0,555	0,547.

50. ¿Un cubo cuya arista es *a* y cuyo peso específico es *s*, hasta dónde se sumerje en un líquido de peso específico s'?

a =6,5 Ctm	5,43 Ctm	40 Mm.	1,75 Ctm.
s =0,83	7,206	0,55	7,783
s'=1	13,597	0,93	13,59.

51. Estando un líquido de peso específico *s* en un vaso prismático de base cuadrada cuyo lado es *a*, se pregunta hasta dònde se levantará el líquido cuando se haya metido en el un cubo cuya arista es *b* y su peso específico s'?

a =24 Ctm	16 Ctm	12 Ctm	6 Ctm.
s =1	1	0,93	13,59
b=5 Ctm	6,5 Ctm	3,33 Ctm	1,75 Ctm
s'=0,92	0,83	0,55	7,783.

52. Siendo *a* la arista exterior de un cubo vacío de peso específico *s* y *b* el grueso de la cubierta, se pregunta hasta dónde este se sumerje en un líquido de peso específico s'.

s=8,77	21,73	7,603
a=55 Mm	43 Mm	82,8 Ctm
b=0,7Mm	0,25Mm	1,5 Mm
s'=1	1,896	1,039.

53. Un cubo vacío de peso específico *s* y cuya arista exterior es *a* se mete en un líquido de peso específico *s'* hasta la parte n^{ma} de su altura, se pregunta qué es el grueso de su cubierta?

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

s=8,763	7,603	21,73	19,74
a=6Ctm	8,25Ctm	29Mm	40Mm
n=$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
s′=1	1,039	1,87	13,57.

54. Siendo *s* el peso específico de un cubo vacío y la arista interior igual á *b*, determinar la arista exterior, con tal que el cubo se meta en un líquido de peso específico *s′* hasta la parte n^{ma} de su altura.

s=8,788	7,653	8,786	19,82
b=0,5Mt	1Mt	0,75Mt	3.75Mt
n=$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
s′=1	1,039	0,875	13,59

*55. Siendo *s* el peso específico de un cubo vacío y el grueso de la cubierta igual á *b*, determinar la arista exterior con tal que el cubo se meta en un líquido de peso específico *s′* hasta la altura *c*.

s=7,207	8,487	7,598	19,723
b=2Mm	0,7Mm	1,75Mm	0,375Mm
c=10 Ctm	3,6Ctm	4,4 Ctm	3Ctm
s′=1	1,039	13,587	1,89

56. Siendo *a*, *b*, *c* las aristas interiores de una arca cuadrangular y abierta por arriba, cuyo peso específico es *s* y el grueso de su cubierta es igual á *d*, se pregunta hasta dónde se meterá en un líquido de peso específico *s′*, y ademas de cuánto peso ha de cargar para ir al fondo?

s=0,547	0,743	0,555	0,707
a=105Ctm	68Ctm	22,1Ctm	18,4Ctm
b=45 „	53 „	15,6 „	11,1 „
c=39 „	35 „	9,0 „	7,4 „
d=2,5 „	3 „	9Mm	1,2 „
s′=1	1,027	1	1,023

§ 21. PRISMA.

57. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su base un triángulo rectángulo cuyos catetos son *a* y *b*, se pregunta cual es su área lateral y total, ademas cual es su volúmen.

h=2,57	5,67	23,6	7,725
a=1,33	2,03	8,8	3,5
b=1,56	3,96	10,5	5,6

58. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su base un triángulo isósceles cuyo lado es *b* y cuya base es *a*, se pregunta cual es su volúmen, su área lateral y total.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

h=23,7	21,70	3	3,7
a=13	13,24	0,8	0,85
b=9,7	9,73	1,6	1,6

59. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su base un triángulo cuyos lados son *a*,*b* y *c*, se pregunta cual es su volúmen y su área lateral y total.

a=5	17,53	4,9	1,43
b=7	28,4	6,8	1,54
c=9	32,51	8,6	1,65
h=17,8	87,49	22,3	2,88

60. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su base un polígono regular de *n* lados cuyo lado es *a*, se pregunta cual es su volúmen, su área lateral y total.

h=6	57,8	7	9,87	5,67	5,66	5,79
n=6	6	3	3	10	5	5
a=4	4,31	6	5,43	2,34	2,34	3,57

61. Queriendo construir un dique de longitud *a* y de altitud *b*, se pregunta cuántos metros cúbicos de tierra se necesita, si el ancho superior es *c* y el inferior *d* metros.

a=234	345	456	653
b=8	9	11	7
c=13	21	19	12
d=19	27	26	19

62. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su base un trapecio cuyos lados paralelos son *a* y *b* y cada uno de los lados no paralelos igual á *c*, se pregunta cual es su volùmen, su área lateral total.

h=23,5	34,7	2,05	66,33
a=7,3	11,3	2,7	37
b=9,7	21,5	4,7	93
c=3,7	14,9	1,7	53

63. Siendo *h* la altura de un prisma regular de *n* lados y *v* su volúmen, se pregunta cual es su área.

n=3	6	8	10	5
h=7,1	5,9	4,37	5,79	5,43
v=109,15	249,57	150,43	702,15	103,3

64.ª Siendo *v* el volúmen de un prisma regular, se pregunta cual es su área, si la altura es *m* veces mayor que el lado de la base.

n=3	3	6	6	8
v=100	1728	100	1728	1000
m=2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$

*65 Siendo *h* la altura de un prisma regular de *n* lados y su área *q*, se pregunta cual es su volùmen.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

n=3	3	6	8
h=5,79	12,34	6,97	20,67
q=66,63	236,75	148,45	867,4

66. Un prisma recto de altura *h* y de área lateral *f*, tiene por base un triángulo isósceles cuya base es *a* se pregunta cual es su volúmen y área total.

h=17,4	17,53	3	36,263
f=421,08	420	9,375	1584
a=7,2	7,40	1,222	15

67. Un prisma recto cuyo volúmen es *v* tiene por base un trián gulo isósceles cuya base es *a* y su lado *b*, se pregunta cual es su área lateral y total?

v=117,18	120	697,125	117,042
a=5,6	6,42	7,333	5,5
b=5,3	5,27	10,417	5,25

68. Siendo el área lateral de un prisma recto igual á f y su área total *q* se pregnnta cual es su volúmen, si su base es un triángulo isósceles cuya base es a?

f=241,92	240	2891,	240
q=300,72	300	3211,83	300
a=7,	6,84	12,5	6,694

69. Siendo el área lateral de un prisma recto igual á *f* y su volúmen *v*, se pregunta cual es su área total si la base es un triángulo rectángulo cuyos catetos forman la razon m:n,

f=361,2	361,3	170,83	171
v=252,84	252,9	106,35	107
$m:n=\frac{5}{12}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{14}$

* 70. Siendo *f* el área lateral de un prisma recto y su área total igual á q, se pregunta cual es su volúmen si su base es un triángulo isósceles cuyo lado es *b*?

f=341,76	341,7	242,66	243
q=376,32	376,4	363,66	288
b=6,	5,93	6,25	6,263

* 71. Siendo *h* la altura de un prisma recto y su área *q*, se pregunta cual es su volúmen si su base es un triángulo rectángulo cuyos catetos forman la razon m:n

h=17,8	17,8	12,66	12,66
q=472,48	372,48	187,83	188
$m:n=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{3}$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

* 72. Siendo h la altura de una prima recto y su área igual á q, se pregunta cual es su volùmen si su base es un triángulo isósceles cuya base y lado están en la razon m:n

h=	18,6	18,7	17,5	17
q=	427,44	427,5	515	576
m:n=	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{25}{14}$

*73. Siendo h la altura de un prisma recto y su área igual á q, se pregunta cual es su volúmen, si su base es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es igual á c.

h=	7,9	9,7	8,25	28,75
q=	105,6	134,82	100,83	1440,83
c=	5,1	5,3	4,26	18,42

*74. Siendo v el volúmen de un prisma recto y f su área lateral, se pregunta cuáles son los catetos de la base, si su hipotenusa es c.

v=	72,36	115,596	168,034	253,75
f=	160,8	63,84	269,5	304,5
c=	5,1	6,5	9,25	8,83

75. Cuanto pesa una barra cuya materia es de peso específico s y cuya longitud igual á b, si su base es un polígono regular de n lados de longitud a.

s =	7,788	0,553	7,788	0,549
n=	3	8	3	6
b=	1Dm	2Dm	40,41 Ctm	35 Dm.
a=	1,7Ctm.	2,5Ctm.	0,75 Ctm.	37,5 Ctm,

76. Construir un prisma regular de n lados de una materia cuyo peso específico es s, de modo que su peso sea p y su altura m veces mayor que el lado de la base.

n=	3	8,	6	8
s=	7,207	0,789	7,207	0,793
p=	500gr	100gr	25kilgr.	20gr.
m=	1,5	2,5	2	2,25

§ 22 PIRÁMIDE.

77. Siendo h la altnra de una pirámide regular y cuadrilátera y a un lado de su base, se pregunta cual es su área lateral y total y cual es su volúmen.

a=	56	26	4,	10,4	7,2	5,6
h=	45	84	9,9	16,5	32,3	12,5

78. Siendo la base de una pirámide regular un cuadrado de lado a se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen, si la altura de la pirámide es n veces mayor que la diagonal de la base.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

a=9,8	5,67	11,9	79,9
n=1,5	$\frac{7}{8}$	1,25	$\frac{2}{3}$

79. Siendo *a* un lado de la base de una pirámide regular y triangular y *b* la arista lateral, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen.

a=8,4	9,7	11,37	27,56
b=18	17,6	19,43	37,49

80. Siendo *a* un lado de la base de una pirámide regular de *n* lados y *b* la altura del triángulo lateral, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen.

n=4	4	3	3	6	6	8	5
a=4,3	5,63	7,3	10,57	4,7	5,43	6,47	4,28
b=7,2	6,7	8,2	13,4	7,43	9,57	17.52	6,3

81. Siendo todas las aristas de una pirámide regular de *n* lados iguales á *b*, se pregunta cual es su área lateral y total y cual es su volúmen.

n=4	4	3	3	b=6,3	5,72	9,47	8,63

82. Siendo *v* el volúmen de una pirámide regular de *n* lados, se pregunta cual es su área, si todas las aristas son iguales entre sí.

n=4	3	v=276,3	56,743

83. Siendo *v* el volúmen de una pirámide regular de cuatro lados, se pregunta cual es su área, si la arista lateral es *n* veces mayor que la de la base.

v=1000	3456	1728	2345,6
n=2	$1\frac{2}{3}$	1,75	2,3

84. Siendo *v* el volúmen de una pirámide regular y triangular y *h* su altura, se pregunta cual es su área lateral y total.

h=12	8,37	93,97	56,34
v=104	38,84	28241	908,37

*85. Siendo *h* la altura de una pirámide regular de *n* lados y *b* su área lateral, se pregunta cual es su área total y su volúmen.

n=4	4	3	3
h=9,4	9,666	5,8	68
b=150	150	30,37	4357

*86 Siendo *a* la arista lateral de una pirámide regular de *n* lados, y *b* su área lateral, se pregunta cual es su área total y volúmen.

n=4	4	3	3
a=7,33	7,25	7,13	71
b=59	59	42,93	4290

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

*87. Siendo v el volúmen de una pirámide regular de n lados y b su área total, se pregunta cual es la longitud de sus aristas.

n=4	4	3	8
v=167	39,396	108,97	17060
b=200,81	75,32	168,81	2274

88. Siendo la base de una pirámide un rectángulo cuyos lados son a y b, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen, si todas las aristas laterales son iguales á c.

a=27	32	66	26	24	42
b=18	126	112	168	70	440
c=38	425	97	157	685	229

*89. Siendo v el volúmen de una pirámide cuya base es un rectángulo de área b, se pregunta cual es la longitud de todas las aristas, si el área lateral es c y la cúspide está situada en la perpendicular levantada á la base desde el centro de ella.

v=1,6 1,4 b=4 3,6 c=10,8 13,2

90. Siendo h la altura de una pirámide de peso específico s cuya base es un cuadrado de lado a, se pregunta cual es su peso.

s=0,728 2,493 a=5,63Ctm. 83,3Ctm h=8,47Ctm. 1,75M.

91. Siendo h la altura da una pirámide de peso específico s cuya base es un triángulo equilátero de lado a, se pregunta cual es su peso,

s=0,67 2,397 a=35Mm. 3,47M. h=102Mm. 2,83M.

92. Siendo p el peso de una pirámide regular de peso específico s. se pregunta cual es su área y de qué longitud son sus aristas, si la base es un cuadrado cuya diagonal es igual á la altura de la pirámide.

p=100 gr. 467,71 gr. s=8,788 11,352

§ 23 TRONCO DE PIRÁMIDE.

93. Siendo h la altura de un tronco de pirámide regular de n lados, el lado de la base inferior y b el de la superior, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen.

n=4	4	3	3	6	6
h=84	5	9,7	11,2	67	18,3
a=43	6,5	8,3	7,3	39	12,7
b=17	3,7	5,8	4,9	25	8,9

94. Se pregunta cual es el área y volúmen de una pirámide regular truncada de n lados, si a es el lado de la base inferior y b el de la superior y ademas c es la altura de un trapecio lateral.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

n=4	4	3	6
a=41	101	7,3	6,5
b=35	59	4,9	4,2
c=17	19	11,2	3,7

95. Siendo la base inferior de un tronco de pirámide un rectángulo cuyos lados son *a* y *b*, el área de la base superior igual á *q* y la altura igual á *h* se pregunta cual es el área total y el volúmen, si la altura pasa por los centros de las bases.

a=8	24	23	47
b=7	15	19	29
q=21,875	160	200	600
h=10	17	31	35

*96. Siendo *v* el volúmen de un tronco de pirámide regular de *n* lados y *h* su altura, se pregunta cual es su àrea lateral y total, si la longitud del lado de la base superior es menor que la de la inferior en *a*.

n=4	3	h=9,6	8,4
v=246,576	493,276	a=1,3	8,4

97. Siendo *a* y *b* las áreas de las bases de un tronco de pirámide y *h* su altura, se quiere dividirle por un plano paralelo á las bases de manera que los volùmenes de los troncos que resultan estén en la razon m:n.

a=171,61	173	361
b=118,81	119	315
h=13,7	15,3	2,75
m=3	5	5
n=5	3	8

98 Siendo *p* el peso de un tronco de pirámide regular de peso específico *s* y de altura *h*, se pregunta cual es el área lateral y tota si el lado de la base inferior es *m* veces mayor que el de la superior

n=4	6	s=0,67	7,206	d=20Ctm.	5,47 Ctm.
p=1500 gr.		21 kilg.		m=2,5	1,25.

§ 24. CILINDRO.

99. Siendo *h* la altura y *r* el radio de un cilindro, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen.

h=8	3,4	4,7	65	3,9	26,7
r=1,2	7,5	3,54	12,5	7,5	0,3125

100. Siendo *a* y *b* los lados de un rectángulo generador de un cilindro, se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen si *b* es el eje fijo.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

a=3,7	4,67	4,3	9	11,6	27
b=5,3	7,89	6,3	27	115,6	165,66

101. Siendo *h* la altura de un cilindro y *b* el perímetro de su base, se pregunta cuál es su área lateral y total y cual su volúmen.

h=50	4,2	7,9	7,75	10,8
b=6,2	7,4	15,6	15,5	15,4

102. Siendo *b* el área lateral de un cilindro y el diámetro de su base igual á *e*, se pregunta cual es su área total y su volúmen.

b=102	2500	2	670
e=10	96	1,5	9,263

103. Siendo *h* la altura de un cilindro y su área lateral igual á *b*, se pregunta cual es su diámetro, área total y volúmen.

h=3,27	4,67	28,416	4,5	3,25
b=103	105,7	757	105,5	418

104. Siendo *a* el diámetro de un cilindro y *v* su volúmen, se pregunta cual es su área lateral y total.

a=10	2,49	2,416	16,2633
v=122,3576	32	36	5787

105. Siendo *a* el área lateral de un cilindro y *v* su volúmen, se pregunta cual es su área total.

a=257	160,47	250,43	86,76
v=1234	601,53	319,955	62,533

106. Siendo *v* el volúmen de un cilindro y *b* el perímetro de su base, se pregunta cual es su área lateral y total.

v=200	600	1234	52,399
b=12	47,1	24	8,9

107. Siendo *b* el área de un cilindro y *a* el diámetro de su base, se pregunta cual es su volúmen y área lateral.

a=3,1	2,526	19	37
b=64.54	200	472,34	9270

108. Construir un cilindro cuyo diámetro sea *a*, de manera que tenga tantas unidades de volúmen cuantas tiene su área las de superficie.

a=4,56 8,87 9,572 17,624

109. Siendo *a* la altura de un cilindro y *v* su volúmen, se pregunta cual es su área lateral y total.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

a=20,7	1,263	47	35
v=1317	120	188586	186478

110. Siendo *a* el área lateral de un cilindro y *b* su base, se pregunta cual es su volúmen.

a=234	43,23	144	6215
b=125	67,47	80	9695

111. Siendo *a* el área lateral de un cilindro, se pregunta cual es su volúmen, si la altura y el diámetro están en la razon m:n.

a=125	87,63	1	182,91
m:n=$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{8}$

112. Siendo *a* el área lateral de un cilindro, se pregunta cual es su volúmen y área total, si su altura es *n* veces mayor que su diámetro.

a=2400	2375	1	656
n=$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1,5	$\frac{2}{3}$

113. Construir un cilindro de volúmen *v* de modo que la altura sea *n* veces mayor que el diámetro.

v=100	100	100	0,043
n=1	2	$\frac{1}{2}$	1,25

114. Siendo *v* el volúmen de un cilindro, se pregunta cual es su área lateral y total si su altura es igual á la circunferencia de la base.

v=100	156,7	75,271	270,268

115. Siendo *v* el volúmen de un cilindro, se pregunta cual es su área si la circunferencia de su base y su altura forman la razon m:n.

v=100	100	1500	1500	222,37
m:n=$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{4}$

116. Siendo *a* el área de un cilindro, se pregunta cual es su volúmen si la altura y el diámetro de la base forman la razon m:n.

a=200	123,47	1	177,12
m:n=$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{5}$

***117.** Siendo *h* la altura de un cilindro, *q* su área total, se pregunta cual es su diámetro, área lateral y volúmen.

h=40	16	8	15
q=2500	359	25,16	30398

***118.** Cual es el volúmen de un cilindro cuya área lateral es *a* y cuya altura excede al diámetro en la cantidad *b*.

a=31,05	161,37	7349	232,21
b=+3,9	—11,6	+45	—13,8

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

*119. Siendo a el área de un cilindro se pregunta cual es su volúmen, si b, es el perímetro de la seccion diagonal que pasa por el eje.

a=377,796	167,442	169,646	227,829
b=35	27,8	26,6	27

120. Siendo h la altura de un tubo, d el diámetro interior y a el grueso de su pared, se pregunta cual es su área y volúmen.

h=69,7	86,3	264	27
d=5,47	6,38	41	2,75
a=0,96	1,37	2,7	1,5

121. Siendo v el volúmen de un tubo, h su altura y a el grueso de la pared, se pregunta cual es su área.

v=1253,7	546,75	1253
a=0,93	1,17	0,775
h=67,4	28,3	67,33

122. Cual es el volúmen de un tubo, si a es su diámetro interior, b el grueso de su pared y c su área?

a=5,91	6,37	3,2633
b=0,87	1,32	1,1666
c=2723	4100	992

123. Cual es el peso de un cilindro de una materia cuyo peso específico es s, si su altura es a y su diámetro b?

a=6,7 Ctm.	8,84 Dm.	2 Mm.	324,84 Mm.
b=3,5 „	4 Dm.	3 Ctm.	2,7 Ctm.
s=11,34	2,7	7,207	7,788

124. Cuánto pesa un cilindro de una materia de peso específico s, si su altura es a y la circunferencia de la base es igual á b?

s=0,856	0,857	0,632	0,823
a=2,76M.	3,5 M.	103 Ctm.	14,7Ctm
b=1,18 M.	1,6 M.	45 Ctm.	5,3 „

125. Cuántos litros de agua dará una bomba por n elevaciones de la maza, si el ancho de la maza es a y la altura de su elevaciones es h?

n=250	a=12,6 Ctm.	b=18,7 Ctm.

126. Qué longitud tiene un alambre de peso específico s, si p es su peso y a su grueso?

s=19,253	19,325	19,253	21,07
a=$\frac{1}{20}$ Mm.	$\frac{1}{25}$ Mm.	$\frac{1}{40}$ Ctm.	0,098 Ctm.
p=1 gr.	1 klg.	1 klg.	2,5 klg.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

127. Una moneda está compuesta de dos metales de peso específico s' y s'' en la razon m:n, se pregunta cual es su grueso si p es su peso y a el diámetro de la base.

s' =10,474	10,474	19,253	10,474
s''=8,878	8.878	8,878	8,878
m=9	9	9	1
n =1	1	1	2
p =25 gr.	37,12 gr.	6,452 gr.	2,6 gr.
a =37 Mm.	41 Mm.	21 Mm.	20 Mm.

128. Siendo p el peso de un cilindro de peso específico s y de altura h, se pregunta cual es su diámetro.

s=13,6	7,788	7,788	2,837
h=12 Ctm.	2,5 M.	1,5 M.	8,9 M,
p=50 gr,	6 klg.	10 klg.	1172,5 kilgr.

129 Construir un cilindro de una materia de peso específico s de manera que su peso sea p y su grueso igual á su altura

s=8, 395 p=100 Gr.

130. Siendo h la altura de un tubo de peso específico s se pregunta cual es su peso, si el diámetro interior es d y el grueso de su pared es a?

s=8,5	7,207	7,207	7,207
d=4Ctm.	15Ctm.	11,2Ctm.	5Ctm.
a=5Mm.	12Mm.	4Mm.	1,03Ctm.
h=5Dm.	1M.	0,25M.	1M.

131. En un baso cilíndrico cuyo diametro es a está colocado un líquido de peso espesífico s, se pregunta hasta á donde se levantará este si se introduce en él un cuerpo de p gramos cuya materia es de peso específico s' ?

a=5,4Ctm.	12,8Ctm.	5,2Ctm.	15,8Ctm.
s=13,587	1,037	13,588	1,034
p=25gr.	87gr.	100gr.	87,493gr.
s'=20,473	2,63	7,788	0,789

132 En un baso cilíndrico cuyo diametro es a se halla un líquido, se pregunta cual es su peso específico, si un cuerpo de peso p sobrenadando levanta á este líquido por la altura c

a=4,8Ctm.	p=250Gr.	c=10,2Mm.
a=12,6Ctm.	p=43,21Gr.	c=3,4Mm

133. A un cilindro de altura h y de peso específico s encierra concentricamente otro cilindro de peso específico s', se pregunta cuanto pesa el todo si a es el diámetro de la primera materia y b el grueso de la segunda?

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

s=21,042 s'=10474 h=55,84Ctm. a=1,6Mm. b=1,44Ctm,
s=20,734 s'=10,428 h=1000M. a=$\frac{1}{6}$Mm. b=$\frac{1}{2}$Mm.

* 134. A un cilindro de altura h y de peso específico s encierra concéntricamente otro cilindro de peso específico s' cuyo grueso es a, se pregunta cuál es el diámetro de dicho cilindro si el todo tiene el peso p.

s=0,785, a=0,8Mm, s'=7,613, h=15Ctm, p=610 gr.
s=7,613, a=1,8 Ctm. s'=0,789, h=16 Ctm, p=270,2 gr.

* 135. A un cilindro de altura h, de diámetro a y de peso específico s encierra concéntricamente otro cilindro de peso específico s', se pregunta cual es el grueso de la segunda materia, si el todo tiene el peso p.

s=0,783, a=6,7Ctm, s'=7,788, h=15,2Ctm, p=612Gr.
s=7,788, a=9Mm. s'=0,791, h=16,3Ctm, p=275Gr.

§ 25 CONO.

136 Siendo r el radio de la base de un cono y h la altura se pregunta cual es su área lateral y total y cual es su volúmen ?

r=8	5	8	8	1,6	3,6	10,4	13,6
h=15	10	30	33	5,4	7,7	15,3	27,3

137 Siendo r el radio de la base de un cono y k el lado se pregunta cual es su área lateral y total y cual su volúmen?

r=9	8	3,7	3,3	2,3	2,53	39,6
k=41	30	7	6,5	9,2	5,38	56,5

138. Siendo k el lado de un cono y su radio igual á n veces el lado, se pregunta cual es el área y volúmen?

n=$\frac{3}{5}$ $\frac{8}{17}$ k=15 51.

139. Siendo k el lado de un cono y c la circunferencia de la base, se preguuta cual es su área y volúmen?

k=7 6,5 c=23,25 5,027

140. Siendo q el área total de un cono y d su diámetro, se pregunta cual es su área lateral y volúmen?

q=1050 36,57 d=15,8 1,53

141. Siendo k el lado de un cono y f su área lateral, se pregunta cual es su volúmen y área total?

k=31,23 11,31 f=780,47 175,63.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

142. Siendo v el volúmen de un cono se pregunta cual es su área, si la altura es igual á n veces el diámetro?

$v=1360$ 1728 2719 5716,7
$n=\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{8}$

143. Siendo v el volúmen de un cono, se pregunta cual es su área, si su diámetro es igual á su lado?

$v=100$ 25 1728 5619

144. Siendo v el volúmen de un cono y b el área de su base se pregunta cual es su área lateral?

$v=100$ 2160 346 344,83
$b=24$ 182 141 98,57

145. Siendo s la suma de los volúmenes de dos conos que tienen iguales sus bases $=b$, se pregunta cual es el volúmen y el área de cada uno si las alturas están en la razon $m:n$?

$b=13,5$ 15,3 $m:n=\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $s=1000$ 1670

146. Siendo b el área de la base de un cono y f su área lateral, se pregunta cual es su volúmen?

$b=50$ 141 181,47 $f=112$ 202 871,48

147. Siendo v el volùmen de un cono, se pregunta cual es su área lateral y total, si a es el área de la seccion que pasa por el eje?

$v=1000$ 2375 $a=100$ 345

* 148 Siendo q el área total de un cono y k su lado se pregunta cual es su área lateral y su volúmen.

$q=343,1$ 66,057 $k=9,7$ 5,78

* **149.** Construir un cono de volúmen v y de área total q.

$v=100$ 347 2175 $q=200$ 343 1053

* 150 Siendo q el área total de un cono se pregunta cual es su área lateral y su volúmen, si su lado es mayor que el diámetro en la cantidad a.

$q=1047$ 36,375 $a=18$ 2,43

151. Siendo r el radio de la base de un cono y k su lado, se pregunta cual es el ángulo central de la superficie desarrollada.

$r=6,7$ 7,6 $k=9,7$ 36,5

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

152 Cual es el ángulo central de la superficie desarrollada de un cono si la base y la superficie lateral forman la razon m : n?

m=3 4 5 5 n=4 7 12 8

153. Siendo la superficie desarrollada de un cono un cuadrante de área f, se pregunta cual es el área total y el volúmen?

f=27,75 64,63 186,01

154. Siendo p el peso de un cono de peso específico 8,788 se pregunta cual es su área total y lateral si la altura es igual á n veces el diámetro?

p=500 gr. 1,03175 kilgr. n=½ 1

§ 26. CONO TRUNCADO.

155. Siendo a y b los radios de las bases de un cono truncado y h la altura del cono completo, se pregunta cual es el área lateral y total y el volúmen del truncado?

a=6 1,5 3,5 5,3 4,7 103
b=5 1,3 2,9 3,8 2,7 77
h=8 9 6 4,7 3,1 88,75

156. Siendo h la altura de un cono truncado c y c' las circunferencias de sus bases se pregunta cual es su área y volúmen?

h=45,6 60 c=10,5 12,56 c′=8,7 9,42

157. Siendo h la altura de un cono truncado, k su lado, y d el diámetro de la base mayor se pregunta cual es su área y volúmen?

h=25,2 26 k=25,5 29,9 d=9,6 8,6

158. Se quiere construir un baso con láminas de estaño, de manera que el diametro inferior sea igual á b y el superior igual á a, se pregunte cuanto estaño se necesita para poder contener e litros.

b=184,398 Mm. a=66,4935 Ctm. e=56,605 litros

159. Siendo q el área total de un cono truncado y los radios de las bases r y r' se pregunta cual es su volúmen?

q=130 120 r=3 r′=2.

160. Siendo h la altura de un cono truncado, su lado k y f su área lateral, se pregunta cual es su volúmen?

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

h=3,5	9,1	6,1	7,48
k=3,7	0,9	6,7	8,31
f =39,521	294,51	113,08	219,7

161. Siendo k el lado de un cono truncado, q su área total y f la lateral, se pregunta cual es su volúmen.

k=5	6,5	8,2
f=62,832	102,1	113,35
q=91,044	145,4	148,85

162. Siendo v el volúmen de un cono truncado, h su altura y k su lado, se pregunta cual es su área lateral y total.

v=75,45	117,03	154,57	100
h=4,8	6.3	7,93	5,67
k=5	6,5	8,21	6,36

163. Siendo v el volúmen de un cono truncado, h su altura, se pregunta cual es su área total y lateral, si a es la diferencia entre los radios de sus bases.

v=75,49	117,13	151,67	100
h=4,8	6,3	7,97	5,37
a=1,4	1,6	1,8	1,3

* 164. Siendo h la altura de un cono truncado, k su lado y q su área total, se pregunta cual es su volúmen.

h=7,2	8	6,97	7,69
k=7,5	8,9	7,41	8,53
q=172,368	216,205	180,4	265

* 165. Siendo h la altura de un cono truncado, f su área lateral y q la total, se pregunta cual es su volúmen.

h=7,2	7,7	6,97	8,05
f =110,75	176,25	125,54	148,19
q=172,37	265,03	180,41	216,25

* 166. Siendo v el volúmen de un cono truncado, h su altura y f su área lateral, se pregunta cual es su área total.

v=144,09	195,6	221	323
h=7,2	7,03	8,04	7,7
f =155,46	134,9	160,9	284,3

*167. Siendo v el volúmen de un cono truncado, h su altura y r el radio de la base menor, se pregunta cual es su área lateral y total.

v=40	75	118	152
h=6	4,7	6,31	8,07
r=1	1,5	1,82	1,54

168. Haciendo pasar por un cono truncado, en el cual los radios de las bases son R y r, un plano paralelo á ellas, de manera que la parte superior del lado sea igual á b y la inferior igual á b', se pregunta cuáles son los volúmenes de las partes.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

R=3,6	4,3	5,1	b=2,8	3,1	4,8
r=1,5	1,9	1,2	b′=4,7	4,3	4,1

169. Cuánto pesa un cono truncado de peso específico *s*, si los radios de las bases son R y r y la altura *h*?

R=2,3 Ctm.	1,8 Mt.	5 Ctm.
r=1,7 „	1,3 „	4 „
h=5,2 „	2,5 „	12 „
s=7,207	1,929	1,5

§ 27. ESFERA:

170. Cual es el área y volúmen de una esfera cuyo diámetro es *d*?

d=7,5 1,596 6,7 24,4

171. Cual es el volúmen de una esfera cuya área es *q*?

q=5 1000 1234 9407

172. Cual es el volúmen de una esfera si el área del círculo máximo es *f*?

f=100 275 3349 9,892

173. Cual es el radio de una esfera, cuya área es *n* veces mayor que la de otro de diámetro *d*?

d=17,5	47,6	92	1,15
n=2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{8}$

174. Cual es el área de una esfera de volúmen *v*?

v=1000 100 1728 945

175. Cual es el radio de una esfera cuyo volúmen es *n* veces mayor que el de otra de diámetro *d*?

d=23,47 67,639 n=2,5 1,75

176. Siendo *v* el volúmen de una esfera, se pregunta cual es el área de un círculo de dicha esfera que dista del centro la longitud *a*.

v=179,6	14,139	523,7	783
a=2,3	0,73	3,23	4,73

177. Siendo el área de una esfera igual á la suma de otras dos cuyos diámetros son *a* y *b*, se pregunta cual es el volúmen de la primera.

a=0,9 1,6 b=48,79 131,256

* 178. Siendo la suma de las áreas de tres esferas igual á *s*, se

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

pregunta cuáles son sus radios, si el diámetro de la segunda es de a mayor que el de la primera y el de la tercera de b mayor que el de la primera.

s=196,13 a=0,6 b=1,8

179. El volúmen de una esfera es igual á la suma de los de otras dos cuyos diámetros son a y b, se pregunta cual es el área de la primera.

a=67,5	23,4	13,4	20,75
b=83,7	17,9	9,9	14,25

* 180. La diferencia entre los volúmenes de dos esferas es a, y la de sus diámetros es b, se pregunta cuáles son los volúmenes y áreas de ellas.

a=609,6 9,029 b=1,8 0,28

181. Formando los volúmenes de dos esferas la razon $m:n$; se pregunta cuáles son sus diámetros, si la suma de los volúmenes, es igual á v?

v=2000 467,970 m:n=3:4 4:3

182. Siendo v la suma de los volúmenes de dos esferas, se pregunta cuales son sus radios, si los diámetros forman la razon m:n

v=1000	257	1728	2375
m=5	3	4	6
n=8	7	9	11

183. Siendo a la suma de los diámetros de dos esferas se pregunta cuáles son sus áreas, si los volùmenes forman la razon m:n

a=9,72 11,52 13,79 m:n=343:64 47:23 23:17

184. Formando los volúmenes de dos esferas la razon m:n, se pregunta cuáles son sus radios, si el diámetro de la una es mayor que el de la otra en la longitud a.

a=6,73 3,56 4,73 m:n=125:27 13:5 19:11

185. Cuánto pesa una esfera cuyo peso específico es s y cuyo diámetro es d?

s=0,673	7,207	7,207	2,373
d=14,5 Ctm.	11,76 Ctm.	0,8 Ctm.	1,25 Ctm.

186. Una esfera de diámetro d pesa p gr. se pregunta cuanto pesa otra esfera de la misma materia, si su diámetro es igual á c?

d=14,5 Ctm.	11,76 Ctm.	p=1075 gr. 6137 gr.
c=9,7 „	14,7 „	

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

187. Qué razon forman los diámetros de dos esferas de igual peso, si tienen sus materias respectivas los pesos específicos s y s'?

s=7,207	0,627	2,457	7,207
s'=2,493	8,395	0,627	8,395

188. Qué razon forman los pesos específicos de dos esferas de igual peso, si a y b son sus radios?

a=21,37	13,7	18,73	9,154
b=9	19,52	18,8	14,398

189. Cual es el área de una esfera de peso p y de peso específico s.?

p=500 gr.	560 gr.	25 gr.	24 klgr.	50 klgr.
s=8,788	7,207	8,395	7,207	7,207

190. Cuánto pesa una esfera vacía de peso específico s, si d es el diámetro total y el grueso de la cubierta es igual á b?

d=10 Ctm.	5 Ctm.	7,5 Ctm.	s=8,788 8,39 7,207
b=2 Mm.	2 Mm.	3,5 Mm.	

191. Cuánto pesa una esfera vacía de peso específico s, si su perímetro esterior es a y el grueso de la cubierta es b?

s=7,207 8,39 a=25 Ctm. 36,7 Ctm. b=2Ctm. 3 Mm.

192 Cual es el grueso de la cubierta de una esfera vacía de peso específico s, si d es el diámetro y p su peso?

s=7,207	8,788	8,788
d=7,25 Ctm.	40 Ctm.	40 Ctm.
p=500 gr.	4 kilgr.	8 kilgr.

* 193 Cual es el diámetro de una esfera vacía de peso específico s si su cubierta de grueso a pesa p gramos?

s=7,207	7,207	7,207	8,787
a=2,4 Mm.	1,5 Ctm.	4,5 Mm.	3 Mm.
p=500 gr.	5 kilgr.	500 gr.	1 kilgr.

194 Cuál es el grueso de una esfera vacía de peso específico s y de diámetro total d, si se sumerje hasta la mitad en un líquido de peso específico?

d=7 10 100 s=8,39 8,345 8,788

195 Una esfera vacía de peso específico s y de diámetro total d se sumerje hasta la mitad en un líquido de peso específico s', si está llena de una materia de peso específico s'', se pregunta cual es su grueso.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

s =7,207	8,39	7,207	2,892
d =10	12	15	25
s′ =13,553	1,0244	13,598	1,846
s″=0,0013	0,0013	1,02	0,818

§ 28. PARTES DE LA ESFERA.

196. Cuál es el volùmen y el área total de un sector de una esfera de diámetro d, si la altura del casquete correspondiente es igual á h?

d=12,5	13	42,5	30,5	26	11,13	6,47
h=0,4	4,9	6,4	4,9	8	3,2	1,37

197. Cual es el volúmen y el área total de un sector esférico si h es la altura del casquete correspondiente y a el radio de su base?

h=36 1,6 4,93 4,07 a=42 6,8 11,27 18,21

198. Cual es el volúmen y la superficie curva de un segmento esférico, si h es su altura y d el diámetro de la esfera?

d=15 35 15,7 7,63 h=5 10 5,6 5,47.

199. Cual es el volúmen y la superficie de un segmento esférico, si h es su altura y a el radio de su base?

h=75 6,4 3 26 a=165 20,8 5 16

*200. Cual es el volúmen y la superficie curva de un segmento esférico, si d es el diámetro de la esfera y a el radio de la base del segmento?

a =12,6 2,52 21 d=29,4 6,79 68

201. Siendo a el volúmen de un sector esférico, se pregunta cual es el volúmen del segmento correspondiente si el área de su casquete es igual á b.

a=28,429	75,067	2125	17,59
b=29,28	77,35	400	15,5

* 202. Siendo el volúmen de un segmento esférico igual á n veces el de su cono correspondiente, se pregunta cuáles son los volúmenes y áreas de estos dos cuerpos, si d es el diámetro de la esfera.

n=$\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{3}$ 3 d=4,56 7,89 13,7 16,9

203. Siendo d el diámetro de una esfera dividido en tres partes que forman la razon m : n : p, se pregunta cual es el volúmen y área de la zona que tiene la parte media del diámetro por altura.

d =9,6	11,9	6,7	8,3	n=4	7	7	5
m=3	5	3	2	p=5	9	9	9

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

204. Cual es el volúmen de un segmento de una esfera vacía, si *d* es el diámetro total de la esfera, *h* la altura total del segmento y *a* el grueso de la cubierta.

d=27 45 63 h=11 28 17 a=2 3 4

*205. Siendo *a* y *b* los radios de las bases de dos segmentos de una misma esfera, se pregunta cual es el volúmen de cada uno, si *c* es la diferencia entre sus alturas.

a=33 2 4 b=63 1 3 c=40 1 2

* 206. Siendo *q* el área de un casquete, se pregunta cual es el volúmen del segmento correspondiente, si su altura es igual al diámetro de su base.

q=3,7 9,5 8,3 24,83 25,003

207. Siendo *h* la altura de un corte esférico, *a* y *b* los radios de las bases, se pregunta cual es su volúmen y el área de la zona.

a=33 2 4 b=63 1 3 h=40 1 2

209. Siendo *b* el área de una zona de altura *h*, se pregunta cual es el volúmen del corte si las bases son iguales.

h=	8	12	36	15
b=	427,256	1394,86	9613,27	1743,584

208. Siendo *v* el volúmen de un corte de altura *h*, se pregunta cual es el área de la zona, si las bases son congruentes.

v=1682 12,45 h=8 1,2

210 Siendo *h* la altura de una zona y *b* su área se pregunta cual es el volúmen del corte, si las bases son congruentes?

a=8 12 3,6 b=780,69 3319,1 189,27

* 211. Siendo *h* la altura de una zona y *b* su área, se pregunta cuáles son los radios de sus bases si *v* es el volúmen de su corte

h=	21	4	3,3	33,6
b=	8246,7	163,363	316,202	4486,2
v=	103282	351,814	908,742	37336

212. Siendo un círculo máximo de diámetro *d* la base mayor de una zona, se pregunta cual es el área y el volúmen del corte si el perímetro de otra base es *n* veces el de la primera?

d=2,9 7,23 17,83 n=$\frac{5}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$

213. Cual es el peso específico de un líquido, si una esfera de diámetro *d* y de peso específico *s* se sumerje en él hasta la altura *h*?

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

d=10 13 17 h=3 3,6 11 s=1 13,59 0,917

214. Cuánto pesa una esfera de diámetro d, si se sumerje en un líquido de peso específico s hasta la parte n^{ma} del diámetro?

d=6,7 Ctm. 9,4 Ctm. s=0,973 13,593 n=2,22 3,5

215. Construir una esfera vacía de peso específico s de manera que tenga el peso p y se sumerja hasta la parte n^{ma} de diámetro en un líquido de peso específico s'.

s=2,811 7,207 n=2,25 3,5
p=25 gr. 125 gr. s=1,743 13,598.

§ 29. CUERPOS REGULARES.

216 Cual es el área y el volúmen de un cuerpo regular siendo a su arista?

Tetraedro	a=3,73	5,67	4,732	19,437
Octaedro	„ 2,67	6,39	5,649	23,456
Icosaedro	„ 4,86	7,63	8,472	0,3456
Exaedro	„ 6,37	9,43	3,249	0,7653
Dodecaedro	„ 3,47	0,83	7,654	1,0567

217. Siendo q el área de un cuerpo regular se pregunta, cual es su arista y volúmen.

Tetraedro	q=43,302	301,81	14,467	345,67
Octaedro	„ 86,603	47,424	238,65	23,456
Icosaedro	„ 216,51	145,58	814,84	678,91
Exaedro	„ 0,9126	52,215	998,46	567,89
Dodecaedro	„ 330,34	670,78	3123,5	4567,8

218 Cual es el arista y el área de un cuerpo regular siendo v el volúmen?

Tetraedro	v=85,914	2,8734	12,236	234,56
Octaedro	„ 58,926	82,786	1789,7	3356,7
Icosaedro	„ 17,454	226,51	383,14	45,678
Exaedro	„ 614,375	493,039	12,813	56,789
Dodecaedro	„ 3923,5	37,649	328,56	7890,1

219. Cual es el diámetro de una esfera circunscrita á un cuerpo regular siendo a la arista?

Tetraedro	a=13,881	3,4538	71,525	2,3
Octaedro	„ 21,214	8,6498	17,961	3,4
Icosaedro	„ 8,4117	2,9809	3,5645	5,6
Exaedro	„ 1,4434	2,8105	13,51	6,7
Dodecaedro	„ 8,2069	14,987	2,5691	7,8

220. Cual es el diámetro de una esfera circunscrita á un cuerpo regular cuya área es q?

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Tetraedro	q=73,901	34,046	115,11	67,8
Octaedro	„ 43,302	14,567	166,35	56,7
Icosaedro	„ 957,45	18,118	40,758	123,4
Exaedro	„ 322,58	6,6978	10,672	67,9
Icosaedro	„ 94,632	20,609	63,114	78,9

221. Cual es el diámetro de una esfera circunscrita ó un cuerpo regular cuyo volúmen es *v*?

Tetraedro	v=1,7321	780,42	3249,4	2345
Octaedro	„ 562,5	7,756	79,092	1234
Icosaedro	„ 20,289	102,05	216,04	1728
Exaedro	„ 0,42282	68,88	1122,4	679
Dodecaedro	„ 43,519	14,927	57,923	3456

222. Siendo *d* el diámetro de una esfera inscrita en un cuerpo regular, se pregunta cual es la arista, área y volúmen de él.

Tetraedro	d=2,449	6,8178	13,432	5,432
Octaedro	„ 4,899	6,4503	11,186	4,321
Icosaedro	„ 12,092	57,438	21,615	6,543
Exaedro	„ 1,849	13,824	24,389	7,654
Dodecaedro	„ 11,135	19,153	34,965	8,765

223. Cual es la diferencia entre el volúmen de un cuerpo regular y el de la esfera inscrita, si *a* es la arista del cuerpo.

Tetraedro	a=36	4,73	0,673	1,234
Octaedro	„ 48	5,17	0,563	2,345
Icosaedro	„ 24	6,71	0,493	3,456
Exaedro	„ 72	3,82	0,715	4,567
Dodecaedro	„ 18	2,63	0,387	5,678

224. Cual es el diámetro de una esfera inscrita en un cuerpo regular si *a* es la arista de él.

Tetraedro	a=8,3283	32,334	66,872	12
Octaedro	„ 3,1843	8,2058	9,5531	24
Icosaedro	„ 12,57	7,079	8,6668	36
Exaedro	„ 3,249	4,480	0,5927	288
Dodecaedro	„ 10,777	3,2779	7,7682	48

225. Cual es la diferencia entre el volúmen de un cuerpo regular y el de la esfera circunscrita siendo *d* el diámetro de ella.

Tetraedro	d=72	4,63	0,932	5,432
Octaedro	„ 48	3,72	0,873	4,321
Icosaedro	„ 36	5,27	0,628	2,109
Exaedro	„ 84	6,13	0,567	7,654
Dodecaedro	„ 24	1,37	0,463	8,765

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Probl. 1. Siendo *d* la diagonal del cubo será: $d=a\sqrt{3}$ lo que se aplica tambien en el problema 4.

Probl. 7. Siendo x la arista del primer cubo se encontrará: $x\sqrt{6}=b\sqrt{n\sqrt{2}}$

Probl. 12. Se necesita resolver las dós ecuaciones:

$x^4:y^3=m:n,\quad x^3+y^2=b^2$, y se tendrá $x^3=\dfrac{mb^3}{m+n}$

Probl. 16, 17, 18. Siendo *a*, la arista ínterior y *b* la exterior de un cubo vacío, será $v=b^3-a^3$

Probl. 19. Siendo d la diagonal tenemos: $d^2=a^2+b^2+c^2$; esta fórmula se aplica muchas veces, así como la siguiente, siendo q el área total de un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas son a, b y c:

$$q=2(ab+ac+bc)$$

Probl. 23. Siendo x la tercera arista será: $x=\dfrac{2bc}{bc-2(b+c)}$

Probl. 26. $v=\sqrt{q'q''q'''}$

Probl. 27. Siendo a′ b′ c′ las tres aristas será: $a'^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

Probl. 28. Siendo x el lado del cuadrado, tenemos $v=\frac{1}{2}x^3$.

Probl. 31. Siendo x la tercer arista será: $x=\dfrac{q-2b^2}{4b}$

Probl. 34. Siendo x el lado del cuadrado tenemos: $2x^2+4cx=q$.

Probl. 36. Siendo x el lado de la base tenemos: $(x+b)^2=c^2+2x^2$.

Probl. 37. Siendo x é y las otras dos aristas se puede encontrar:

$$v=a.x.y,\quad d^2=a^2+x^2+y^2;\ \text{de donde } (x+y) \text{ y } (x-y).$$

Probl. 38. Siendo x é y las otras aristas se debe determinar ántes $(x+y)$.

Probl. 39. Siendo x é y las otras aristas se hallará fácilmente: $x.y$.

Probl. 40. Siendo x, y, z las tres aristas, tenemos las tres ecuaciones:

$$g=x.y,\qquad d^2=x^2+y^2+z^2;\qquad \tfrac{1}{2}q=xy+z(x+y)$$

de donde $d^2=(x+y)^2+z^2-2g$ y $\frac{1}{2}q=g+z(x+y)$

estas ecuaciones bastan para encontrar z.

Probl. 41. Siendo x, y, z las tres aristas será: $\dfrac{v}{z}+\dfrac{zs}{2}=\frac{1}{2}q$.

Probl. 42. Para las otras aristas x é y se tendrán:

$$xy+b(x+y)=\tfrac{1}{2}q \quad y \quad x^2+y^2=d^2-b^2;$$

Encontrado ahora $(x+y)$ determínese $x.y$.

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Probl. 44. Siendo s la suma de las aristas será $s=\frac{dq+2d^3-2v}{2d^2}$.

Probl. 50. Siendo x la altura hasta donde &a. será: $x=\frac{as}{s'}$,

Probl. 51. $x=\frac{b^3}{a^2}\frac{s'}{s}$.

Probl. 52. $x=[a^3-(a-b)^3]\frac{s}{a^2s'}$.

Probl. 53. Siendo x el grueso se debe hallar: $(a-x)^3$.

Advertencia. Para resolver todos los problemas, en donde se encuentran polígonos regulares sirven las fórmulas siguientes.

Siendo a el lado del polígono regular r el radio y ρ la apotema será

para el triángulo,	para el cuadrado,	para el pentágono
$r=\frac{1}{3}a\sqrt{3}$	$r=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	$r=a\sqrt{\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})}$
$\rho=\frac{1}{6}a\sqrt{3}$	$\rho=\frac{1}{2}a$	$\rho=a\sqrt{\frac{1}{20}(5+2\sqrt{5})}$
para el exágono	**para el octógono**	**para el decágono**
$r=a$	$r=\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$r=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$
$\rho=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$\rho=\frac{1}{2}a\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\rho=\frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$\sqrt{2}=1{,}41421$ $\sqrt{3}=1{,}73205$ $\sqrt{5}=2{,}23607$

Estas fórmulas se puede encontrar por medio de la Geometría plana § 60 probl. 10 y 11.

Probl. 59. Aplíquese Geometría plana § 60 problema 6.

Probl. 61. $v=\frac{c+d}{2}ab$

Probl. 62. Siendo h′ la altura de la base será:

$$h'=\sqrt{\tfrac{1}{4}(2c+b-a)(2c-b+a)}.$$

Probl. 66. Se puede determinar fácilmente el lado de la base.

Probl. 67. Determinada la altura de la base no tiene dificultad el encontrar la altura del prisma.

Probl. 68. Siendo x la altura del prisma tenemos: $x=\frac{q-f}{a}$

Probl. 69. Siendo x un cateto de la base é y la altura del prisma búsquese el producto x.y, despues x

Prb. 70. El resultado será $v=\frac{\frac{1}{2}f(q-b)}{2b+\sqrt{2b^2\pm2\sqrt{(b^4-(b-f)^2)}}}$

Probl. 71. Siendo x un cateto de la base tendremos:

$$mq=nx^2+hx(m+n+\sqrt{m^2+n^2})$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Probl. 72. Siendo x la base del triángulo isósceles será:

$$q=\frac{x^2}{2m}\sqrt{4n^2-m^2}+\frac{xh}{2m}(m+2n)$$

Probl. 73. Siendo x é y los catetos tenemos

$$x^2+y^2=c^2,\quad q=h(x+y)+ch+xy$$

Eliminado $(x+y)$ determínese $x.y$.

Probl. 74. Siendo x é y los catetos y z la altura del prisma serán:

$$f=z(x+y)+cz,\quad x^2+y^2=c^2,\quad xyz=v$$

Por ser $x+y=\sqrt{c^2+2xy}$, $z=\frac{2v}{xy}$ se puede encontrar el valor de $x.y$, de donde el de x é y por ser $x-y=\sqrt{c^2-2xy}$

Probl. 86. Siendo x el lado del polígono regular tenemos:

$$b=\tfrac{1}{2}ax\sqrt{a^2-\tfrac{1}{4}x^2}$$

Probl. 87. Siendo x el lado del polígono regular é y la altura de la pirámide tenemos para n=3.

$$V=x^2y\frac{\sqrt{3}}{12};\qquad b=\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,x^2+\tfrac{1}{2}3x\sqrt{y^2+\tfrac{1}{12}x^2}$$

Espresado b en funcion de y se puede encontrar y.

Para n=4 hágase un cálculo semejante.

Probl. 89. encontrado el valor de la altura de la pirámide atiéndase que todas las aristas laterales son iguales; y siendo x é y los lados de la base, determínese (x^2+y^2) despues $(x+y)$ ó $(x-y)$.

Probl. 92. Siendo x el lado del cuadrado tenemos:

$$x^3=\frac{3p}{2s}\sqrt{2}.$$

Probl. 95. Siendo x é y los lados respectivamente homólogos á los a y b se saca:

$$x'=\sqrt{\frac{aq}{b}}\qquad y=\sqrt{\frac{bq}{a}}$$

Ahora bien siendo h′ la altura de un trapecio lateral cuyos lados paralelos son a y x, h″ la del otro cuyos lados son b é y se encontrará:

$$h'=\sqrt{h^2+\tfrac{1}{4}(b-y)^2}\ \text{y}\ h''=\sqrt{h^2+\tfrac{1}{4}(a-x)^2}$$

Probl. 96, Espresadas las bases en funcion del lado x de la

"Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

base inferior, se puede formar una ecuacion entre v y x, luego determinar x, y por tanto tambien el área de las bases; despues encontrado el valor de ρ y ρ' no es difícil determinar el área de un trapecio lateral.

Probl. 97. Para la altura h′ de toda la pirámide completa tenemos $h'=\dfrac{h\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ y para su volúmen $V'=\frac{1}{3}\dfrac{h\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Siendo X el volúmen del tronco inferior será:

$$X=\frac{mh(a+b+\sqrt{ab})}{3(m+n)}$$

Ahora bien siendo x la base superior del tronco X y h″ su altura sabemos que $\frac{1}{3}x(h'-h'')=V'-X$ ademas es: $a:x=h'^2:(h'-h'')^2$ luego, $(h'-h'')^3=3\dfrac{h'^2}{a}(V'-X)=\dfrac{h^3(na\sqrt{a}+mb\sqrt{b})}{(m+n)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}$

$$\text{ó}\quad h''=\frac{h}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{\frac{na\sqrt{a}+mb\sqrt{b}}{m+n}}\right)$$

Probl. 105. Siendo r el radio y h la altura del cilindro se deduce

$$r=\frac{2v}{a}\qquad h=\frac{a^2}{4\pi v}$$

Probl. 108 Siendo h la altura tenemos: $h=\dfrac{2a}{a-4}$

Probl. 127. Siendo p′ y p″ los pesos de los dos metales, v′ y v″ sus volúmenes, ademas x el grueso de la moneda, puede encontrarse las siguientes espresiones

$$p'=\frac{m}{m+n}\,p\qquad p''=\frac{n}{m+n}\,p$$

de donde $$v'=\frac{mp}{s'(m+n)}\qquad v''=\frac{np}{s''(m+n)}$$

y por último $$x=\frac{4p}{\pi a^2(m+n)}\left(\frac{m}{s'}+\frac{n}{s''}\right)$$

Probl. 131. Se ha de distinguir $s>s'$ y $s<s'$

Probl. 132. Siendo x el peso específico será: $x=\dfrac{p}{\pi a^2 c^4}$

Probl. 134. Siendo r el radio del cilindro se deduce la ecuacion

$$p=\pi hsr^2+\pi hs'(a+2r)a$$

Probl. 135. se resuelve como el 134

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Probl. 145. Siendo x la altura de uno se tendrá: $x=\frac{3ma}{b(m+n)}$

Probl. 149. Siendo r el radio y k el lado del cono se puede encontrar:

$$q=\pi r^2+\pi rk \quad y \quad v=\pi\tfrac{1}{3}r^2\sqrt{k^2-r^2}$$

de donde $\alpha \quad \frac{q}{\pi r} \quad k+r \qquad y \qquad v=\tfrac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{q}{\pi r}(k-r)}$

luego $\beta \quad k-r=\frac{9v^2}{r^4q\pi}$ y uniendo α y β se saca

$$q^2r^2-9v^2=2r^4\pi q$$

Probl. 155. Encontrada la altura del cono parcial se sabe la del truncado.

Probl. 158. Determínese la altura.

Probl. 160. Siendo R y r los radios de las bases, determínese $(R+r)$ y despues $(R-r)$.

Probl. 161. No es difícil determinar los valores de $(R+r)$ y de (R^2+r^2), y de donde se sabe el de $R.r$.

Probl. 162. Encontrados los valores de (R^2+r^2+Rr) y $(R-r)^2$ se conoce el de $R.r$ y por tanto el de $(R+r)^2$.

Probl. 163. Se resuelve como el 162.

Probl. 164. Por ser conocido $(R-r)$ se puede resolver la ecuacion, $q=\pi k(R+r)+\pi(R^2+r^2)$.

Probl. 165. Encontrado el valor de (R^2+r^2) y sabiendo que

$$R+r=\frac{f}{\pi k} \quad \text{en donde} \quad k^2=(R-r)^2+h^2,$$

basta determinar el valor de Rr.

Probl. 167. Determínese el valor de R

Probl. 168. Encontrado el valor del radio de la interseccion intermedia determínese las alturas parciales.

Probl. 180. Recuérdese que en general se tiene

$$(x^3-y^3)=(x^2+xy+y^2)\ (x-y)$$

Probl. 186. Determínese el peso esprcífico de dicha materia.

Probl. 192. Siendo x el grueso de la cubierta se puede encontrar el valor de $(d-x)^3$ y por tanto el de x.

Probl. 196. Para determinar el área total se necesita encontrar el radio r_1 de la base del casquete: $r_1{}^2=(d-h)h$

Probl. 197, 199 y 200 se resuelven por la fórmula del 196.

Probl. 201. Para el radio de la esfera encontramos $r=\frac{3a}{b}$

Probl. 202 Atendiendo á la fórmula del 196 tendremos

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2(\tfrac{3}{2}d-h)=\frac{n\pi}{3}\ h(\tfrac{1}{2}d^2-\tfrac{3}{2}dh+h^2),$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

Probl. 205. Siendo h la altura de uno de estos segmentos y [h+c] la del otro basta determinar el valor de h; lo que se obtendrá aplicando dos veces la fórmula del 196.

Probl. 206. Siendo d el diámetro de la esfera y h la altura del casquete tenemos las dos ecuaciones

$q=\pi dh$, $\frac{1}{4}h^2=[d-h]h$ en donde se puede eliminar d y así determinar h

Probl. 207. Siendo e′ y e″ las distancias de los centros de las bases al centro de la esfera tenemos, si r es el radio de la esfera

$$e'^2=r^2-a^2 \qquad e''^2=r^2-b^2$$

$$\text{luego } [e'+e''][e'-e'']=b^2-a^2$$

y por ser h igual a′ $(e'-e'')$ ó $e'+e''$ tendremos siempre

$$e'=\frac{h^2+b^2-a^2}{h}$$

de donde se determinará r y por tanto el área.

Probl. 209. Para el radio de la base tenemos

$$r_1{}^2=r^2-\frac{1}{4}h^2 \text{ en donde } r=\frac{b}{2\pi h}$$

Probl, 208. El valor de r_1 puede encontrarse fácilmente y tambien r por la fórmula del 209.

Probl. 211. Denotando el radio de la esfera por r y los de bases del corte por $r_{,}$, $r_{,,}$ se conoce $r_{,}^2+r_{,,}^2$, de donde se determinarán las distancias al centro de la esfera de dichas bases, por ser

$$e'^2+e''^2=2r^2-[r_{,}^2+r_{,,}^2] \text{ y } e'-e''=h$$

y por último se encontrarán los valores

$$r_{,}=\sqrt{(r+e')(r-e')} \qquad r_{,,}=\sqrt{(r+e'')(r-e'')}$$

Probl. 212. Denotando por *r*, el radio de otra base y por *h* la altura de la zona, será

$$h^2=\frac{1}{4}d^2-r_1{}^2 \text{ y } r_1=\frac{d}{2n}$$

Probl. 215. Siendo *r* el radio total de la esfera será:

$$\frac{p}{s'}=\frac{1}{3}\pi(3-\frac{2}{n})\frac{4}{n^2}r^3$$

Denotando ahora por r′ el radio interior se encuentra su valor por la fórmula siguiente:

$$\frac{p}{s}=\frac{4}{3}\pi(r^3-r'^3)$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

§ 30. FÓRMULAS RELATIVAMENTE Á LOS CUERPOS REGULARES.

Para poder resolver los problemas sobre los cuerpos regulares debemos conocer las relaciones que hay entre los lados de estos relativamento al radio de la esfera circunscrita y á su apotema.

Llamando a el lado del poliedro, R el radio de la esfera circunscrita, P la distancia del centro de la esfera á las caras y D la distancia del mismo centro á las aristas medias, tendremos por medio de la fig. 52 las relaciones fundamentales, siendo r y ρ los radios del círculo circunscrito é inscrito de la cara.

$$P^2=R^2-r^2,\quad D^2=P^2+\rho^2,\quad R^2=D^2+\tfrac{1}{4}a^2.$$

Esto supuesto espresemos el valor de R y P para cada uno de los cuerpos regulares aplicando las fórmulas de la advertencia de la pág. 82.

I. Tetardro [fig. 51a].

Se ve fácilmente que la altura h del tetaedro regular pasará por el centro de la cara, y por tanto por el centro de la esfera circunscrita, de donde tenemos:

$$h^2=(R+P)^2=a^2-r^2 \text{ en donde } r=\tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$$

y por ser $P=\sqrt{R^2-r^2}$ se sigue $R+\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{a^2-\tfrac{1}{3}a^2}=a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

luego $$R^2-r^2=R^2+\tfrac{2}{3}a^2-2aR\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

lo que dará $$R=\tfrac{1}{4}a\sqrt{6} \text{ y de donde } P=\tfrac{1}{12}a\sqrt{6}$$

II. Octaedro [fig. 51_b],

El cuadrilátero ABCD es un cuadrado por ser un plano en el cual se halla situado el centro de la esfera, de donde tenemos

$$R=\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \text{ y } P=\tfrac{1}{6}a\sqrt{6} \text{ por ser } P^2=R^2-r^2.$$

III. Icosaedro [fig. 51_e].

Por ser ABCDE y A'B'C'D'E' dos pentágonos regulares [Pl. VIII 3] y paralelos entre sí se sigue que el centro de la esfera se halla en la distancia media de estos, y por tanto haciendo pasar por el centro un plano paralelo á los dos pentágonos, resultará en las caras respectivas un decágono regular de lado $a'=\tfrac{1}{2}a$ y de radio D; de donde tenemos:

$$D=\tfrac{1}{2}a'(\sqrt{5}+1)=\tfrac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$$

Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"

por ser $$R^2=D^2+\tfrac{1}{4}a^2$$

se saca $$R=\tfrac{1}{2}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

y por ser $P^2=R^2-r^2$ tenemos $P^2=\tfrac{1}{16}a^2(10+2\sqrt{5})-\tfrac{1}{3}a^2$

y por consiguiente $P=\tfrac{1}{12}a\sqrt{3(14+6\sqrt{5})}=\tfrac{1}{12}a(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$.

IV. Exaedro [fig. 51_d].

El centro de la esfera debe equidistar de las dos caras opuestas y paralelas, luego será

$$P=\tfrac{1}{2}a \text{ y } R=\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+r^2)}=\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

V. Dodecaedro [fig. 51_e].

ABCDE y A'B'C'D'E' representan dos pentágonos regulares y paralelos, de donde se sigue que abcde y a'b'c'd'e' representan ítem pentágonos regulares, y por consiguiente el centro de la esfera se halla en el medio de estos. Ahora bien, haciendo pasar por el centro un plano paralelo á los dos pentágonos resultará en las caras respectivas un decágono regular de lado $a''=\tfrac{1}{2}a'$ y de radio D; de donde tenemos:

$$D=\tfrac{1}{2}a''(\sqrt{5}+1)=\tfrac{1}{4}a'(\sqrt{5}+1)$$

Aplicando Pl. § 58 teor. 5° se tendrá $a'=\tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$

luego será $$D=\tfrac{1}{8}a(\sqrt{5}+1)^2=\tfrac{1}{4}a(3+\sqrt{5})$$

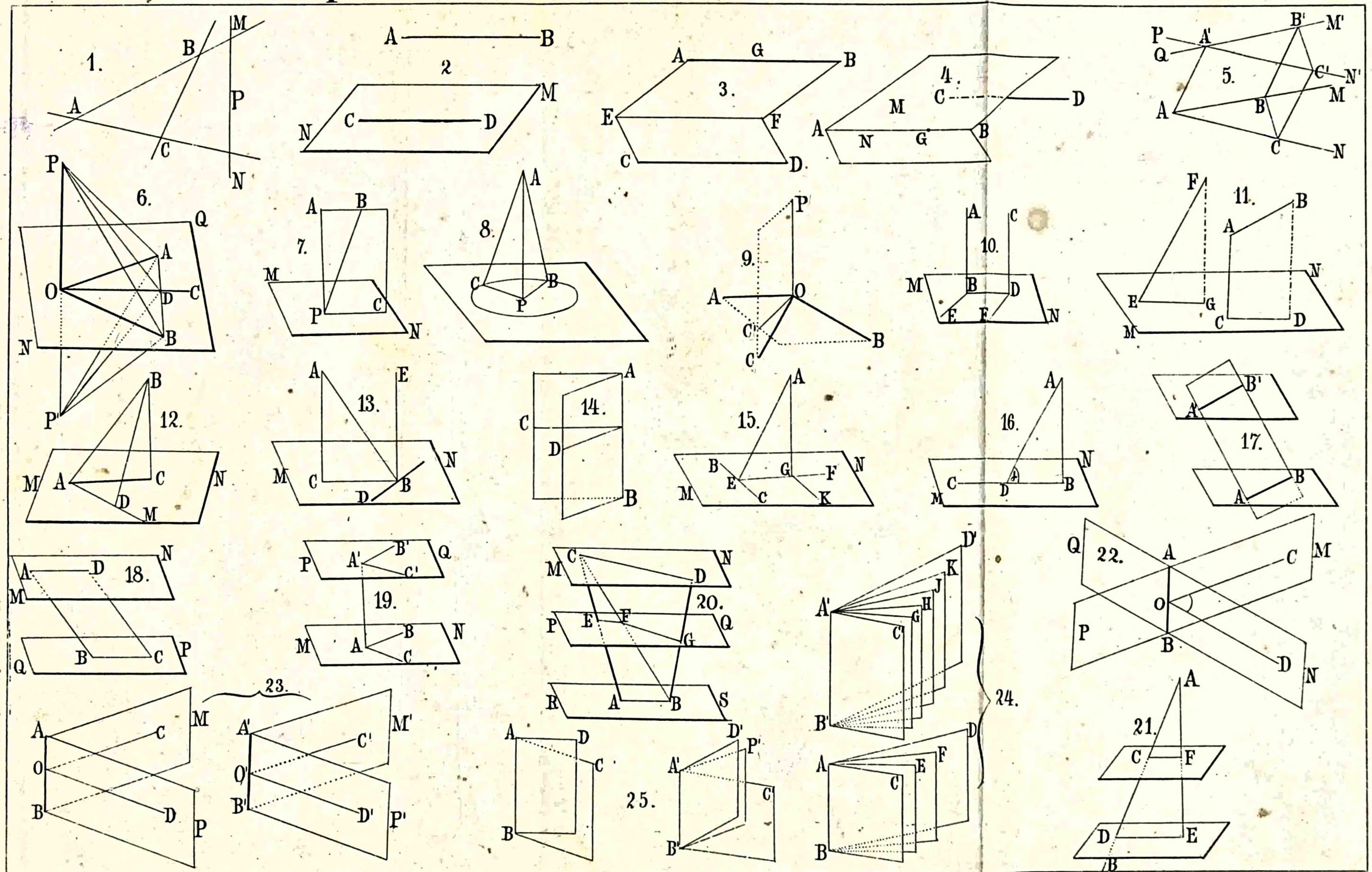
y $$R=\sqrt{D^2+\tfrac{1}{4}a^2}=\tfrac{1}{4}a\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$

ó $$R=\tfrac{1}{4}a\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}=\tfrac{1}{4}a(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$$

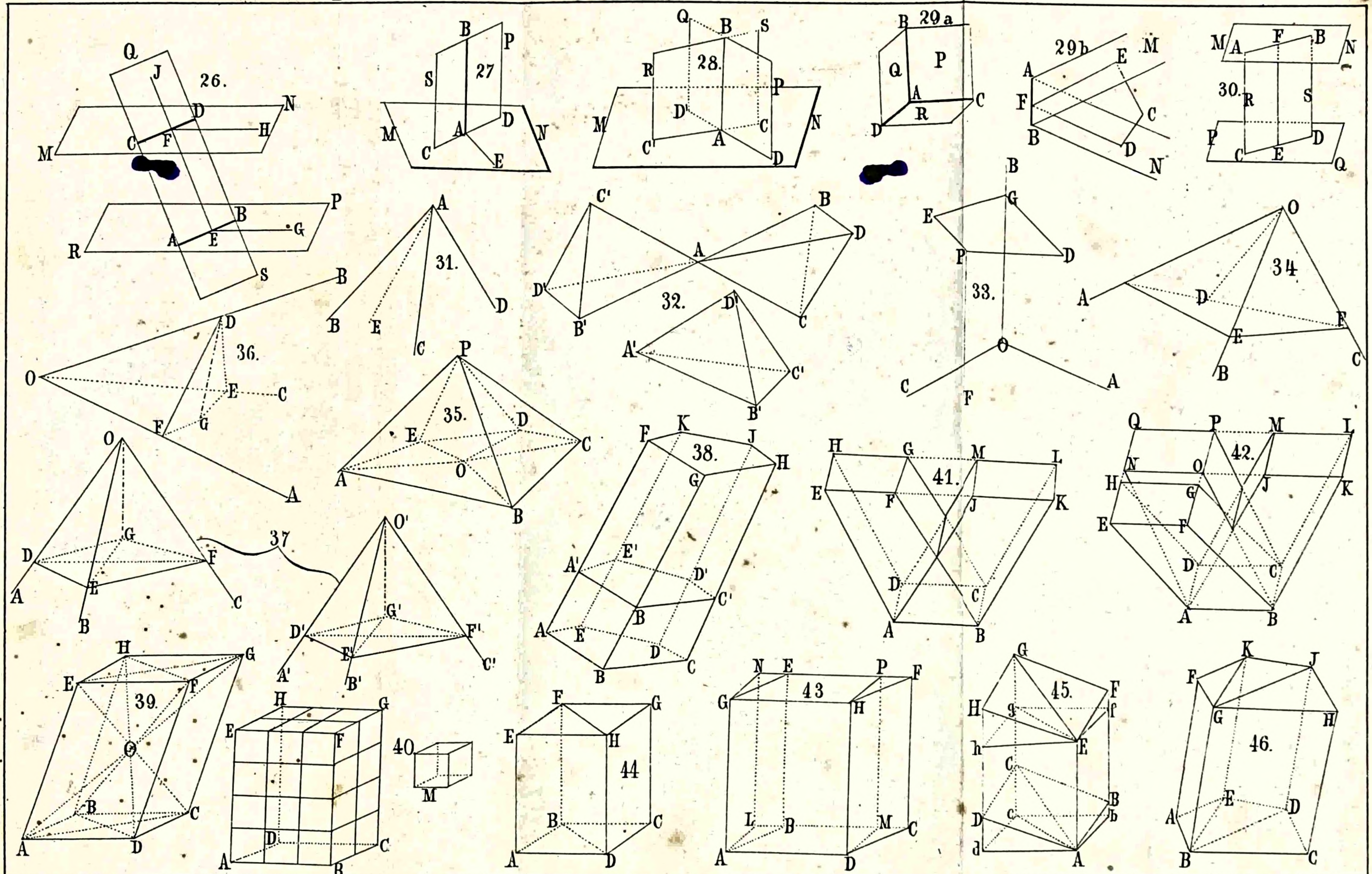
Ademas es $P=\sqrt{R^2-r^2}=\tfrac{1}{4}a\sqrt{10+\tfrac{22}{5}\sqrt{5}}$

luego $$P=\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

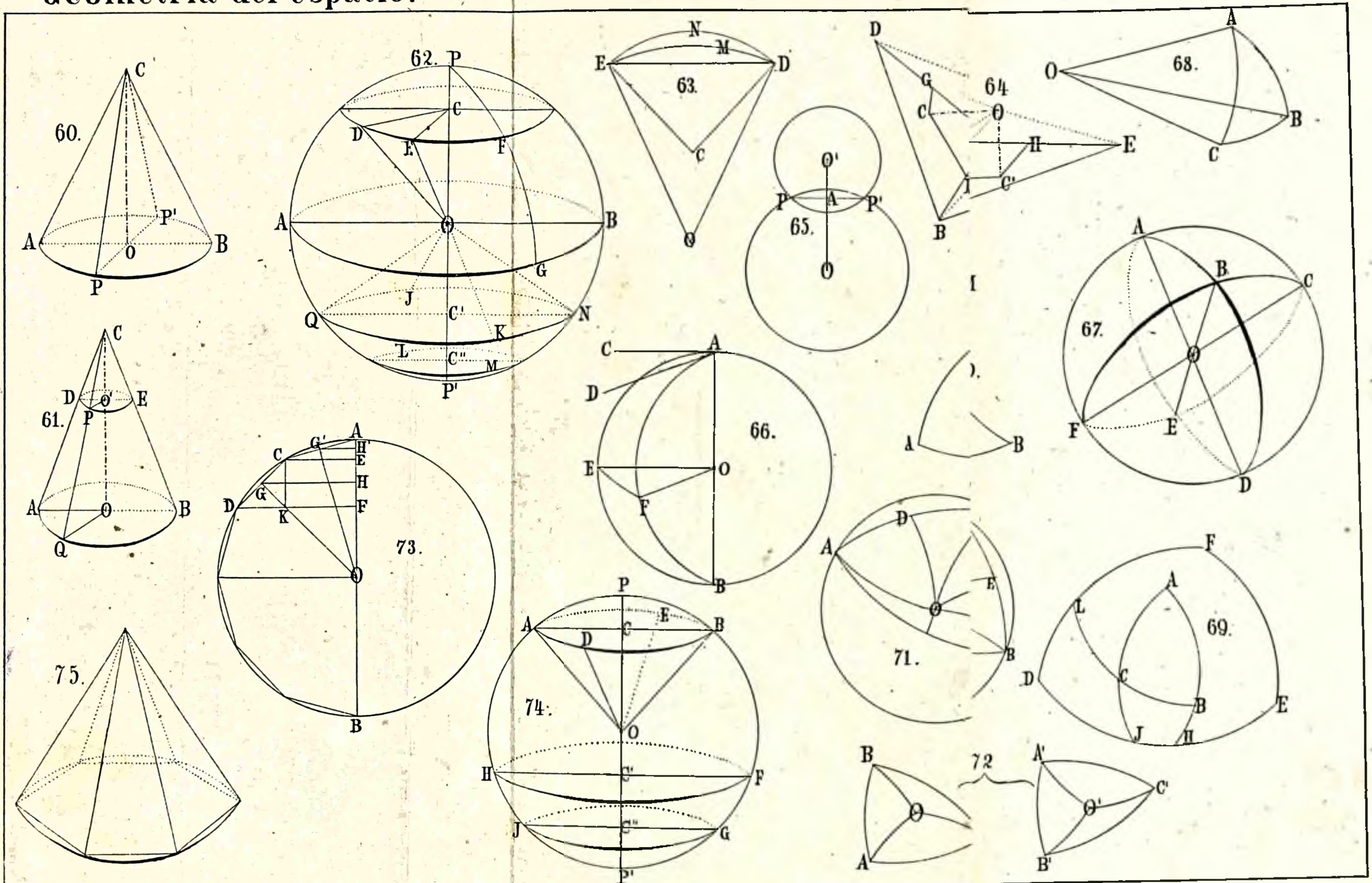
Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"



Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"



Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"



Biblioteca Nacional del Ecuador "Eugenio Espejo"